

# TIESINIS PROGRAMAVIMAS

## 1. Tiesinės nelygybės

Pavaizduokite grafiškai tiesinių nelygybių sprendinių aibes:

1)  $x_2 \geq 0$ ;

2)  $x_1 \leq 2$ ;

3)  $x_2 \geq -1$ ;

4)  $x_1 \geq 0$ ;

5)  $x_1 + x_2 \leq 5$ ;

6)  $x_2 \leq 4$ ;

7)  $x_1 - x_2 \geq 3$ ;

8)  $x_1 + 2x_2 \leq 8$ ;

9)  $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ ;

10)  $x_1 + 2x_2 \leq 0$ ;

11)  $x_2 - x_1 \geq 0$ ;

12)  $4x_1 + 3x_2 \leq 12$ ;

13)  $3x + 5y \geq 15$ ;

14)  $3x - 5y \leq 15$ ;

15)  $5x - 3y \geq 15$ ;

16)  $4x + 7y \geq 0$ ;

17)  $6x - 5y \leq 0$ ;

18)  $x + 5y \geq 10$ ;

19)  $3x - 2y \leq 0$ ;

20)  $2x - 7y \geq 14$ ;

21)  $3x - y \leq 2$ .

## 2. Tiesinių nelygybių sistemos

1. Pavaizduokite grafiškai šių tiesinių nelygybių sistemų sprendinių aibes:

1) 
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 0, \\ 6x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0; \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 4x_1 - x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6; \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \geq -2, \\ x_1 - x_2 \geq 3; \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 6x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 2; \end{cases}$$

5) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 \geq 0, \\ 4x_1 + x_2 \geq 0; \end{cases}$$

6) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_2 \leq 2, \\ 3x_1 \leq 4; \end{cases}$$

7) 
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 3x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 2; \end{cases}$$

8) 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -6, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_2 \geq -2; \end{cases}$$

9) 
$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 6, \\ 8x + 2y \leq 8, \\ 3x - y \leq 3, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

10) 
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 6, \\ 4x + y \leq 4, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

11) 
$$\begin{cases} 2x - 3y \geq -6, \\ x + 3y \geq 6, \\ 3x - 2y \leq 6; \end{cases}$$

12) 
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ x + 3y + 1 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} y \geq 1, \\ x + y \leq 3, \\ x - y \geq 1; \end{cases} \quad 14) \begin{cases} x - y + 2 \geq 0, \\ x - y - 2 \leq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases} \quad 15) \begin{cases} 2x - 3y \leq 6, \\ x \geq 0, \\ x \leq 2, \\ y \leq 0; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x + 5y \leq 10, \\ 2x + 3y \geq 0, \\ 2x - y \leq 6; \end{cases} \quad 17) \begin{cases} 3x + 7y \leq 21, \\ 3x + 7y \geq 0, \\ x - y \geq -4, \\ x - y \leq 3; \end{cases} \quad 18) \begin{cases} x + y \geq 0, \\ x + 2y \geq 0, \\ x + 3y \geq 0, \\ x + 4y \geq 0. \end{cases}$$

2. Pavaizduokite grafiškai šių tiesinių nelygybių sistemų sprendinių aibes ir apskaičiuokite jų kontūrų viršūnių koordinates:

$$1) \begin{cases} x - 7y \geq -31, \\ x + y \geq 1, \\ 3x - y \leq 7; \end{cases} \quad \text{Ats.: } (-3;4), (4;5), (2;-1). \quad 2) \begin{cases} x - y \leq 5, \\ 3x + 5y \leq 23, \\ -x + y \leq 3; \end{cases} \quad \text{Ats.: } (1;4), (6;1).$$

$$3) \begin{cases} 6x - 7y \geq -30, \\ x + 4y \leq 26, \\ 5x + 2y \leq 40, \\ y \geq 0; \end{cases} \quad \text{Ats.: } (-5;0), (2;6), (6;5), (8;0). \quad 4) \begin{cases} 2x - 3y \geq -12, \\ 4x + y \leq 46, \\ x + 2y \leq 22, \\ 2x - 3y \leq 16; \end{cases} \quad \text{Ats.: } (6;8), (10;6), (11;2).$$

### 3. Tiesinis programavimas

1. Išspręskite grafiškai šiuos tiesinio programavimo uždavinius:

$$1) \max(2x_1 + x_2), \text{ kai } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 9, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0; \end{cases} \quad \text{Ats.: } 7. \quad 2) \max(4x_1 + 3x_2), \text{ kai } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0; \end{cases} \quad \text{Ats.: } 17.$$

$$3) \max(2x_1 + 3x_2), \text{ kai } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0; \end{cases} \quad \text{Ats.: } 16. \quad 4) \max(4x_1 + 3x_2), \text{ kai } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 32, \\ 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0; \end{cases} \quad \text{Ats.: } 28.$$

$$5) \min(3x_1 + 4x_2), \text{ kai } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0; \end{cases} \quad \text{Ats.: } 15. \quad 6) \min(2x_1 - x_2), \text{ kai } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 4; \end{cases} \quad \text{Ats.: } 5.$$

7)  $\max(2x_1 + 5x_2)$ , kai

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

Ats.:30.

8)  $\min(2x_1 + 4x_2)$ , kai

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

Ats.:8.

9)  $\min(2x + 3y)$ , kai

$$\begin{cases} 2x + y \leq 6, \\ 3x - y \leq 4, \\ x \geq -1, \\ y \geq -2; \end{cases}$$

Ats.: -8.

10)  $\max(2x + y)$ , kai

$$\begin{cases} 4x + y \leq 4, \\ 2x - y \geq -4, \\ x + y \geq -2; \end{cases}$$

Ats.:4.

11)  $\min(x - 2y)$ , kai

$$\begin{cases} x + 2y \leq 4, \\ x + y \geq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq -1; \end{cases}$$

Ats.: -4.

12)  $\max(3x + 2y)$ , kai

$$\begin{cases} x + 6y \leq 30, \\ 2x - y \leq 8, \\ 3x + 2y \geq 6, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

Ats.:26.

13)  $\min(3x + 2y)$ , kai

$$\begin{cases} x + 6y \leq 30, \\ 2x - y \leq 8, \\ 3x + 2y \geq 6, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

Ats.:6.

14)  $\min(3x + 4y)$ , kai

$$\begin{cases} x + y \geq 5, \\ 2x + 5y \geq 10, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

Ats.:15.

15)  $\min(4x + 3y)$ , kai

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 32, \\ 2x + y \leq 12, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

Ats.:0.

16)  $\min(2x + y)$ , kai

$$\begin{cases} 2x - y \geq -4, \\ x + y \geq -2, \\ 4x + y \leq 4; \end{cases}$$

Ats.: -4.

17)  $\max(x - 2y)$ , kai

$$\begin{cases} x + 2y \leq 4, \\ x + y \geq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq -1; \end{cases}$$

Ats.:8.

18)  $\max(x + y)$ , kai

$$\begin{cases} x + 4y \leq 8, \\ 3x + 2y \leq 12, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

Ats.:4,4.

19)  $\max(x+y)$ , kai

$$\begin{cases} x+2y \leq 10, \\ 3x-8y \leq 16, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

Ats.: 9.

20)  $\min(x-2y)$ , kai

$$\begin{cases} 2x+5y \leq 43, \\ 2x-7y \leq -17, \\ 2x-y \geq 1; \end{cases}$$

Ats.: -10.

21)  $\max(4x+7y)$ , kai

$$\begin{cases} 3x-2y \geq -8, \\ x-y \leq 7, \\ x-3y \leq 3, \\ x \geq 0, y \geq 0; \end{cases}$$

Ats.:  $\emptyset$ .22)  $\min(2x-2y)$ , kai

$$\begin{cases} 3x+2y \leq 33, \\ x-y \geq -4, \\ 2x-9y \leq -9, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

Ats.: -8.

2. Cecho keturiuose baruose gaminami dviejų rūšių gaminiai. Reikia sudaryti tokį gamybos planą, kad atidavus gaminius, būtų gautas didžiausias pelnas. Pirmame bare dirbama ne daugiau 16 h, antrame – 30 h, trečiame – 16 h ir ketvirtame – 12 h.

Lentelėje nurodyta, kiek laiko (valandomis) reikia kiekvienos rūšies gaminiui pagaminti atitinkamame bare. Nulis rodo, kad gaminytis atitinkamame bare negaminamas.

Gaminiai	Barai			
	1	2	3	4
I	4	3	0	2
II	2	6	4	0
Bare galima dirbti (valandų)	16	30	16	12

Cechas gauna tokį pelną: atidavęs vieną I rūšies gaminį – 3 Lt, II rūšies – 4 Lt.

Ats.: Didžiausias pelnas, atidavus dviejų rūšių gaminius, yra 22 Lt. Cechas jį gautų, pagaminęs 2 I rūšies gaminius ir 4 antros rūšies gaminius.

3. Batų ateljė siuva dviejų modelių A ir B avalynę ir jiems pagaminti naudoja trijų rūšių žaliavas, kurių atsargos ribotos. Be to, modelių A ir B vienai porai pagaminti sunaudojamų žaliavų kiekiai ( $\text{dm}^2$ ) pateikti lentelėje. Šioje lentelėje taip pat nurodyta žaliavų atsargų kiekiai ir pagamintos batų poros sąlyginė kaina (Lt).

	Gaminiai		Žaliavų atsargos
	Modelis A	Modelis B	
$\check{Z}_1$	5	0	100
$\check{Z}_2$	4	4	120
$\check{Z}_3$	4	8	160
Gaminio vieneto kaina	60	30	

Sudarykite modelių A ir B optimalų gamybos planą, kad pajamos, gautos pardavus produkciją, būtų didžiausios.

Ats.: Modelio A reikia pagaminti 20 vnt., modelio B reikia pagaminti 10 vnt., didžiausias pelnas 1500 Lt.

4. Kiekvieną dieną autoūkiui reikia mažiausiai 650 litrų dizelinio kuro, 324 litrų benzino ir 48 litrų alyvos tam, kad autoūkis normaliai dirbtų. Degalinė A gali pristatyti 130 litrų dizelinio kuro, 36 litrus benzino ir 4 litrus alyvos, visa tai už 240 Lt. Panašias prekes siūlo ir degalinė B, kuri už 65 litrus

dizelinio kuro, 54 litrus benzino ir 12 litrų alyvos prašo 300 Lt. Kiek užsakymų kasdien reikia sudaryti autoūkiui su kiekviena degaline, norint patenkinti dienos poreikius degalams ir tepalams mažiausiomis kainomis?

Ats.: A – 3, B – 4;  $F_{\min}$  5 1920 Lt.

5. Cecho bare gaminami dviejų rūšių gaminiai. Vienam I rūšies gaminiui suvartojama 5 kg vario ir 1 kg aliuminio, o vienam II rūšies gaminiui – 3 kg vario ir 2 kg aliuminio. Realizavęs vieną I rūšies gaminį, baras gauna 2 Lt pelno, o realizavęs vieną II rūšies gaminį – 3 Lt. Bare yra 45 kg vario ir 16 kg aliuminio. Kiek kiekvienos rūšies gaminių reikia pagaminti, norint gauti didžiausią pelną?

Ats.: I – 6, II – 5;  $F_{\max}$  5 27 Lt.

6. Firma gamina 2 rūšių prekes  $P_1$  ir  $P_2$ , naudodama trijų pavadinimų žaliavas:  $\check{Z}_1$ ,  $\check{Z}_2$ , ir  $\check{Z}_3$ . Jų sąnaudos prekės kiekio vienetui pagaminti, turimos žaliavų atsargos ir pelnas už kiekvieną parduotą prekės vienetą pateiki lentelėje:

	Prekės		Atsargos
	$P_1$	$P_2$	
$\check{Z}_1$	2	12	720
$\check{Z}_2$	2	3	270
$\check{Z}_3$	9	3	900
Pelnas	250	250	

Sudarykite optimalų gamybos planą, kad pelnas būtų didžiausias. Koks tas pelnas?

Ats.:  $P_1$  – 90,  $P_2$  – 30,  $F_{\max}$  5 30000 Lt.

7. Dviejų pavadinimų siuviniams  $S_1$  ir  $S_2$  naudojami trijų artikulų audiniai  $A_1$ ,  $A_2$  ir  $A_3$ . Audinių sąnaudų normos (metrais) kiekvienam siuviniiui, turimos atsargos (metrais) ir pelnas (litais) už kiekvieną parduotą siuvinį pateikti lentelėje:

	Siuviniai		Atsargos
	$S_1$	$S_2$	
$A_1$	2	6	420
$A_2$	3	3	270
$A_3$	9	6	720
Pelnas	20	30	

Sudarykite didžiausią pelną duosiantį siuvimo planą. Koks tas pelnas?

Ats.:  $S_1$  – 30,  $S_2$  – 60,  $F_{\max}$  5 2400 Lt.

8. Įmonė planuoja pirkti daugiausia 10 autobusų, kurie galėtų pervežti mažiausiai 360 keleivių. Pasirinkti 2 autobusų modeliai A ir B. Modelio A autobusas gali pervežti 40 keleivių ir kainuoja 20000 Lt, o modelio B autobusas gali pervežti 30 keleivių ir kainuoja 15000 Lt. Kiek ir kokio modelio autobusų turi nupirkti įmonė, kad būtų patenkinti pervežimo reikalavimai, o išlaidos pirkiniais būtų mažiausios? Kokia minimali pirkinio kaina?

Ats.: A – 6, B – 4 arba A-9;  $F_{\min}$  5 180000.

9. Baldų įmonė dviejuose cechuose gamina lovas ir kušetes. Vienai lovai pagaminti sugaištama 12 valandų pirmame ceche ir 8 valandos antrame ceche. Vienai kušetei pagaminti sugaištama 8 valandos pirmame ceche ir 12 valandų antrame ceche. Pardavus lovą, įmonė gauna 400 Lt pelną, o pardavus kušetę – 300 Lt. Maksimalus mėnesio valandų skaičius pirmame ceche yra 840 valandų, o antrame ceche – 600 valandų. Kiek lovų ir kušėčių turi pagaminti įmonė per mėnesį, kad pardavus produkciją, pelnas būtų didžiausias? Koks maksimalus pelnas?

Ats.: 66; 6; 28200 Lt.

10. 1 ha ploto žemės sklype reikia pasodinti mažiausiai 2000 sodinukų. Numatoma sodinti obelis ir serbentų krūmus. Viena obelis užima  $10 \text{ m}^2$  žemės plotą, o serbentų krūmas –  $2 \text{ m}^2$ . Realizavus derlių, numatoma gauti 30 Lt pajamų iš obels ir 5 Lt iš serbentų krūmo. Kiek obelių ir kiek serbentų krūmų reikia pasodinti, kad pelnas būtų didžiausias? Koks maksimalus pelnas?

Ats.: 750; 1250; 28750 Lt.

11. Dvi kepyklos,  $K_1$  ir  $K_2$ , kepa duoną pagal trijų prekybos centrų,  $C_1$ ,  $C_2$ , ir  $C_3$ , užsakymą. Pirmoji kepykla iškepė 18 tonų, antroji – 22 tonas duonos. Šią duoną reikia nuvežti į prekybos centrus: 12 tonų į  $C_1$ , 8 tonas į  $C_2$  ir 20 tonų į  $C_3$ . Vidutinės transporto išlaidos (Lt) vienai tonai pervežti yra tokios:

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$K_1$	50	20	7
$K_2$	10	40	35

Sudarykite pervežimo planą, kad transporto išlaidos būtų mažiausios.

$$\text{Ats.: } \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 12 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Numatoma gaminti penkių pavadinimų  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  ir  $D_5$  detales naudojant žaliavas  $R_1$ ,  $R_2$  ir  $R_3$ . Šių žaliavų sąnaudos vienai detalei bei turimos jų atsargos yra tokios:

	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	Atsargos
$R_1$	2	0	3	11	1	710
$R_2$	4	2	3	1	7	790
$R_3$	5	1	4	7	11	1160

Pardavus būtų galima gauti 20 Lt pelną už kiekvieną  $D_1$  detalę, 25 Lt už  $D_2$ , 12Lt už  $D_3$ , 5Lt už  $D_4$  ir 44 Lt už  $D_5$ . Detalių gamybą reikia suplanuoti taip, kad visos turimos žaliavos būtų sunaudotos, o gautas pelnas – didžiausias.

$$\text{Ats.: } \bar{x} = (0;190;0;60;50).$$

13. Statybos bendrovė trims objektams  $O_1$ ,  $O_2$  ir  $O_3$  statyti perka cementą iš gamyklų  $G_1$  ir  $G_2$ . Užsakymai yra atitinkamai 100 tonų, 150 tonų ir 120 tonų. Iš pirmos gamyklos nupirkta 180 tonų cemento, o iš antrosios – 190 tonų. Cementą iš gamyklų reikia nugabenti į statybų objektus, paskirstant jį taip, kad bendrosios transporto išlaidos būtų kuo mažesnės. Sudarykite optimalų pervežimo planą, kai vidutinės vienos tonos pervežimo kainos (litais) yra tokios:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$
$G_1$	7	11	8
$G_2$	13	14	5

$$\text{Ats.: } \begin{pmatrix} 100 & 80 & 0 \\ 0 & 70 & 120 \end{pmatrix}$$