VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Milda Kubilienė, Valė Stankevičienė

TIESINĖS ALGEBROS PRAKTIKUMAS

Vilnius „Technika“ 2004

Milda Kubilienė, Valė Stankevičienė. Tiesinės algebros praktikumas. Mokomoji knyga. Vilnius: Technika, 2004. 80 p.

Ši aukštosioms technikos mokykloms skirta mokomoji knyga supažindina studentus su antrosios ir trečiosios eilės determinantais ir matricomis, tiesinių algebrinių lygčių sistemų sprendinių radimu ir vektorinės algebros pagrindais. Siekdamos palengvinti studentų savarankišką darbą, autorės pateikė trumpas teorinio kurso santraukas bei uždavinių sprendimo pavyzdžių. Tikimasi, kad šis leidinys padės studentams išmokti spręsti nagrinėjamo tipo uždavinius.

Mokomoji knyga skirta VGTU pirmojo kurso studentams.

Leidinį rekomendavo VGTU Fundamentinių mokslų fakulteto studijų komitetas

Recenzavo: prof. habil. dr. Leonas Saulis, doc. dr. Sigutė Vakrinienė

VGTU leidyklos „Technika“ 672 mokomosios metodinės literatūros knyga

ISBN 9986-05-729-9

TURINYS

1. DETERMINANTAI

1. Antrosios eilės determinantas yra skaičius, užrašomas kvadratinės lentelės, turinčios dvi eilutes ir du stulpelius, pavidalu ir apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, (a_{ij} \in R) \tag{1.1}$$

Skaičiai a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} vadinami determinanto elementais. Elementai a_{11}, a_{22} sudaro pagrindinę įstrižainę, elementai a_{12}, a_{21} – šalutinę įstrižainę.

2. Trečiosios eilės determinantas apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33},$$

$$(a_{ij} \in R) \tag{1.2}$$

3. Elemento a_{ij} minoru M_{ij} vadinamas determinantas, kuris gaunamas iš turimojo išbraukus i-tąją eilutę ir j-tąjį stulpelį. Minoro eilė yra vienetu mažesnė negu turimojo determinanto.

4. Elemento a_{ij} adjunktu A_{ij} vadinamas to elemento minoras, padaugintas iš $(-1)^{i+j}$, t. y. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

5. Determinantas yra lygus bet kurios eilutės (stulpelio) elementų ir jų adjunktų sandaugų sumai:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

$$(a_{ij} \in R) \tag{1.3}$$

6. Kurios nors eilutės (stulpelio) elementų sandaugų iš kitos eilutės (stulpelio) adjunktų suma yra lygi nuliui.

Determinanto savybės:

1. Pakeitus determinanto eilutes atitinkamais stulpeliais, jo reikšmė nepasikeis.

2. Sukeitę dvi gretimas determinanto eilutes (stulpelius) vietomis, gausime skirtingo ženklo determinantą.

3. Jei determinanto kurios nors eilutės (stulpelio) elementai turi bendrąjį daugiklį, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą.

4. Determinantas, turintis dvi proporcingas eilutes (stulpelius), lygus nuliui.

5. Jei determinanto kurios nors eilutės (stulpelio) elementai yra dviejų dėmenų sumos, tai tas determinantas lygus dviejų determinantų sumai. Viename iš jų minėtąją eilutę (stulpelį) sudaro pirmieji dėmenys, kitame – antrieji dėmenys, o likusios eilutės (stulpeliai) visuose trijuose determinantuose vienodos.

6. Prie determinanto bet kurios eilutės (stulpelio) elementų pridėję atitinkamus kitos eilutės (stulpelio) elementus, padaugintus iš kurio nors realiojo skaičiaus, gausime determinantą, lygų turėtajam.

PAVYZDŽIAI

1.1. Apskaičiuoti determinantą:

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Pagal formulę (1.1):

$$D = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

1.2. Apskaičiuoti determinantą:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Pagal formulę (1.2):

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot 4 \cdot (-7) + 3 \cdot 1 \cdot 6 + (-1) \cdot (-2) \cdot (-5) - 6 \cdot 4 \cdot (-5) - \\ &\quad -2 \cdot 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \cdot (-7) = 55. \end{aligned}$$

1.3. Pasinaudojus determinantų savybėmis, apskaičiuoti determinantą:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Pirmojo stulpelio elementai turi bendrąjį daugiklį 2, todėl

$$D = 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Pirmosios eilutės elementai turi bendrąjį daugiklį 3, todėl pagal tą pačią savybę:

$$D = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Prie pirmojo stulpelio elementų pridėkime atitinkamus antrojo stulpelio elementus, padaugintus iš (-1):

$$D = 6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Šį determinantą išreiškiame pirmosios eilutės elementais, padaugintais iš atitinkamų adjunktų:

$$D = 6 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \cdot (2+6) = -48.$$

1.4. Apskaičiuoti determinantą:

$$D = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Prie pirmojo stulpelio elementų pridėję atitinkamus trečiojo stulpelio elementus ir pasinaudoję ketvirtąja determinantų savybe, gauname:

$$D = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta + \cos^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma + \cos^2\beta & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos^2\alpha \\ 1 & 1 & \cos^2\beta \\ 1 & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

1.5. Apskaičiuoti ketvirtosios eilės determinantą:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Ketvirtosios eilės determinantai apskaičiuojami pagal (1.3) formulę, išreiškiant juos trečiosios eilės determinantais. Kad nereikėtų skaičiuoti kelių trečiosios eilės determinantų, pirmajame stulpelyje paliekame nepakitusį elementą a_{11}, o kitus paverčiame nuliais. Tai galima įvykdyti pirmosios eilutės elementus padauginus iš skaičiaus 5 ir pridėjus prie atitinkamų antrosios eilutės elementų, pirmosios eilutės elementus padauginus iš skaičiaus (-1) ir pridėjus prie atitinkamų trečiosios eilutės elementų, pirmosios eilutės elementus padauginus iš skaičiaus (-3) ir pridėjus prie atitinkamų ketvirtosios eilutės elementų:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 12 & 14 & 23 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -7 & -13 \end{vmatrix}.$$

Gautąjį determinantą išreiškiame pirmojo stulpelio elementų ir jų adjunktų sandaugų suma:

$$D = (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 12 & 14 & 23 \\ -4 & 0 & -6 \\ -5 & -7 & -13 \end{vmatrix}.$$

Antrosios eilutės elementai turi bendrąjį daugiklį (-2), trečiosios eilutės elementai turi bendrąjį daugiklį (-1), antrojo stulpelio elementai turi bendrąjį daugiklį 7, be to, prie pirmosios eilutės pridėję trečiąją, padaugintą iš (-2), gausime:

$$D = (-2) \cdot (-1) \cdot 7 \begin{vmatrix} 12 & 2 & 23 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 13 \end{vmatrix}.$$

Gautąjį determinantą išreiškiame antrojo stulpelio elementų ir jų adjunktų sandaugų suma:

$$D = 14 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -14 \cdot (6+6) = -168.$$

UŽDAVINIAI

1.1. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & 1 \\ -1 & \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix}.$$

Ats.: $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$.

1.2. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ats.: 18.

1.3. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ats.: –15.

1.4. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ats.: 180.

1.5. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}.$$

Ats.: 0.

1.6. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ats.: 1.

1.7. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

Ats.: $-2(x^3+y^3)$.

1.8. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ats.: 160.

1.9. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

Ats.: 1.

1.10. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ats.: -60.

1.11. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -15 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Ats.: 320.

1.12. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix}.$$

Ats.: 319.

1.13. Apskaičiuoti determinantą:

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ats.: $(be - cd)^2$.

1.14. Išspręsti lygtį:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Ats.: $x = -3$.

1.15. Išspręsti lygtį:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x + 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ats.: $x_1 = -10$, $x_2 = 2$.

1.16. Išspręsti lygtį:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Ats.: $x_{1,2} = 1$, $x_3 = -2$.

1.17. Išspręsti lygtį:

$$\begin{vmatrix} 1 - x & 1 & 2 \\ 0 & 2 - x & 3 \\ 0 & 0 & 3 - x \end{vmatrix} = 0.$$

Ats.: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

1.18. Išspręsti lygtį:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x - 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ats.: $x = 11$.

2. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ SPRENDIMAS KRAMERIO METODU

Imkime pirmojo laipsnio trijų lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (a_{ij},\ b_i \in R)$$

Determinantas

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

sudarytas iš koeficientų prie nežinomųjų, vadinamas sistemos determinantu.

1. Jei sistemos determinantas $D \neq 0$, tai sistema turi vienintelį sprendinį, kuris apskaičiuojamas pagal vadinamąsias Kramerio formules:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, 3,$$

čia D_i – determinantas, gautas iš determinanto D, pakeitus jo i-tąjį stulpelį sistemos laisvaisiais nariais $b_i, i = 1, 2, 3$.

2. Jei sistemos determinantas $D = 0$ ir bent vienas iš determinantų D_i nelygus nuliui, tai sistema yra nesuderinta, t. y. sprendinių neturi.

3. Jei sistemos determinantas $D = 0$ ir visi D_i lygūs nuliui, tai sistema gali turėti be galo daug sprendinių arba visai jų neturėti.

Lygčių sistema, kurioje visi laisvieji nariai b_i yra lygūs nuliui, vadinama homogenine lygčių sistema. Jei sistemos determinantas $D \neq 0$, tai sistema turi vienintelį sprendinį $x_i = 0, i = 1, 2, 3$. Jei $D = 0$, tai sistema turi be galo daug sprendinių.

PAVYZDŽIAI

2.1. Išspręsti lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 2. \end{cases}$$

Sprendimas. Apskaičiuojame sistemos determinantą:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10.$$

Kadangi $D \neq 0$, tai sistema turi vienintelį sprendinį. Norint apskaičiuoti šį sprendinį, reikia rasti dar tris determinantus $D_1,\ D_2,\ D_3$, kurie gaunami iš determinanto D, pakeitus i-tąjį ($i = 1, 2, 3$) stulpelį sistemos laisvųjų narių stulpeliu:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 20;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15.$$

Tada iš Kramerio formulių gauname:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{20}{10} = 2; \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}\,.$$

Ats.: $\left(\frac{1}{2};\ 2;\ \frac{3}{2}\right)$.

2.2. Išspręsti tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 \qquad = 1. \end{cases}$$

Sprendimas. Apskaičiuojame determinantus:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Kadangi sistemos determinantas $D = 0$, o $D_1 \neq 0$, tai ši tiesinių lygčių sistema neturi sprendinių.

Ats.: Ø.

2.3. Išspręsti tiesinių homogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Sprendimas. Apskaičiuojame sistemos determinantą:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

$D \neq 0$, todėl tiesinių homogeninių lygčių sistema turi vienintelį nulinį sprendinį:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0.$$

Ats.: $(0;\ 0;\ 0)$.

2.4. Išspręsti tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = 0, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 = 1, \\ 7x_1 + 7x_2 + \ \ x_3 = 2. \end{cases}$$

Sprendimas. Apskaičiuojame sistemos determinantą:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Apskaičiavę $D_1,\ D_2$ ir D_3, gausime, kad visi jie lygūs nuliui. Šiuo atveju, kai visi determinantai lygūs nuliui, sistema turi be galo daug sprendinių. Sistemos determinanto minoras, esantis viršutiniame kairiajame kampe:

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Tai rodo, kad determinanto trečioji eilutė yra dviejų pirmųjų eilučių tiesinė kombinacija. Iš tikrųjų, jei visus pirmosios eilutės elementus padaugintume iš 3, o antrosios – iš 2 ir sudėtume, tai gautume atitinkamus trečiosios eilutės elementus.

Kadangi $M_{33} \neq 0$, tai viena sistemos lygtis (trečioji) yra kitų dviejų lygčių tiesinė kombinacija. Todėl trijų lygčių sistema, pertvarkoma į dviejų lygčių sistemą su trimis nežinomaisiais, bus tokia:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = 0, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Perrašome šią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = \qquad x_3, \\ 2x_1 - \ \ x_2 = 1 - 3x_3. \end{cases}$$

Apskaičiuojame sistemos determinantą ir determinantus D_1 ir D_2:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 3 \\ 1 - 3x_3 & -1 \end{vmatrix} = 8x_3 - 3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 2 & 1 - 3x_3 \end{vmatrix} = 1 - 5x_3.$$

Tuomet, pagal Kramerio formules, gauname sistemos sprendinius:

$$x_1 = \frac{3 - 8x_3}{7};\ x_2 = \frac{5x_3 - 1}{7}.$$

Imdami skirtingas nežinomojo x_3 reikšmes, gauname atitinkamas x_1 ir x_2 reikšmes. Pvz., kai $x_3 = 0$, gauname sprendinį $\left(\frac{3}{7};\ -\frac{1}{7};\ 0\right)$; kai $x_3 = 1$, sprendinys – $\left(-\frac{5}{7};\ \frac{4}{7};\ 1\right)$ ir t. t. Paprastai šios lygčių sistemos sprendinį užrašome taip:

$$\left\{\left(\frac{3 - 8x_3}{7};\ \frac{5x_3 - 1}{7};\ x_3\right)\middle| \forall x_3 \in R\right\},$$

čia simbolis $\forall$ vadinamas bendrumo kvantoriumi ir atitinka žodžius: kiekvienam, bet kuriam, visiems.

Taigi ši sistema turi be galo daug sprendinių.

Pastaba. Kai sistemos determinantas $D = 0$ ir visi minorai lygūs nuliui, tai visos trys duotosios sistemos lygtys yra proporcingos, o sistema pertvarkoma į vieną tiesinę lygtį su trimis nežinomaisiais. Tada du nežinomieji yra pasirenkami laisvai, o trečiąjį išreiškiame jais iš šios tiesinės lygties.

UŽDAVINIAI

Išspręsti lygčių sistemas:

2.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$

Ats.: $(1;\ 1;\ 1)$.

2.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

Ats.: $(1;\ 1;\ 1)$.

2.3. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28, \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5. \end{cases}$

Ats.: $(2;\ 3;\ 4)$.

2.4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

Ats.: $(1;\ 3;\ 5)$.

2.5. $\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 2, \\ 2x_1 - \ \ 3x_2 + \ \ 4x_3 = 3, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 5. \end{cases}$

Ats.: $\Big\{\Big(\dfrac{9-7x_3}{5};\ \dfrac{1+2x_3}{5};\ x_3\Big)\Big|\forall x_3 \in R\Big\},$

2.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 7x_1 - x_2 + \ \ x_3 = 17. \end{cases}$

Ats.: Ø.

2.7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Ats.: $\{(t;\ -2t;\ t)|\forall t \in R\},$

2.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Ats.: $(0;\ 0;\ 0;).$

2.9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

Ats.: $\Big\{\Big(\dfrac{7-7x_3}{11};\ -\dfrac{10x_3+1}{11};\ x_3\Big)\Big|\forall x_3 \in R\Big\},$

2.10. $\begin{cases} 2x_1 + \ \ 3x_2 - \ \ 5x_3 = 4, \\ 4x_1 + \ \ 6x_2 - 10x_3 = 8, \\ 8x_1 + 12x_2 - 20x_3 = 16. \end{cases}$

Ats.: $\Big\{\Big(2 - \dfrac{3x_2}{2} + \dfrac{5x_3}{2}; x_2;\ x_3\Big)\Big|\forall x_2,\ x_3 \in R\Big\},$

2.11. $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 = 1, \\ 2x_1 - \ \ x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 \qquad\quad - \ \ x_3 + \ \ x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

Ats.: $\left(0;\ 2;\ \frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

2.12. Su kuriomis m ir n reikšmėmis sistema:

$$\begin{cases} mx_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 + x_3 = n, \\ 13x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

a) turi vienintelį sprendinį;
b) neturi sprendinių;
c) turi be galo daug sprendinių?

Ats.:
a) $m \neq 3,\ n \in R$;
b) $m = 3,\ n \neq 1$;
c) $m = 3,\ n = 1$.

2.13. Su kuriomis a ir b reikšmėmis sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = b, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$$

a) turi vienintelį sprendinį;
b) neturi sprendinių;
c) turi be galo daug sprendinių?

Ats.:
a) $a \neq -3,\ b \in R$;
b) $a = -3,\ b \neq \frac{1}{3}$;
c) $a = 3,\ b = \frac{1}{3}$.

2.14. Su kokia a reikšme homogeninė lygčių sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - \ \ 2x_2 + \ \ \ \ x_3 = 0, \\ ax_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0, \\ \ \ x_1 + \ \ 2x_2 - \ \ 3x_3 = 0 \end{cases}$$

turi nenulinį sprendinį?

Ats.: $a = 5$.

3. MATRICOS

Stačiakampė realiųjų skaičių lentelė, kurioje yra m eilučių ir n stulpelių, vadinama matrica ir žymima:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Skaičiai a_{ij} vadinami matricos A elementais; i – eilutės numeris; j – stulpelio numeris. Matricą galima sutrumpintai žymėti $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$.

1. Matrica, kurioje eilučių skaičius lygus stulpelių skaičiui $(m = n)$, vadinama kvadratine matrica. Kvadratinėje matricoje elementai $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sudaro pagrindinę įstrižainę.

2. Kvadratinė matrica, kurioje visi pagrindinės įstrižainės elementai lygūs vienetui, t. y. $a_{ii} = 1$; $i = 1, 2, \ldots, n$, o kiti elementai yra nuliai, vadinama vienetine matrica ir žymima raide E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

3 . Matrica, kurioje visi elementai lygūs nuliui, vadinama nuline matrica ir žymima O.

4. Matrica, kurioje yra tik viena eilutė

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix},$$

vadinama matrica-eilute arba vektoriumi-eilute.

5. Matrica, kurioje yra tik vienas stulpelis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},$$

vadinama matrica-stulpeliu arba vektoriumi-stulpeliu.

6. Matrica, gauta iš turimos matricos A, eilutes sukeitus vietomis su stulpeliais, vadinama transponuota matrica ir žymima A^T.

7. Dvi matricos A ir B, turinčios vienodą eilučių ir vienodą stulpelių skaičių, vadinamos vienodo (to paties) tipo matricomis.

8. Kvadratinės matricos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

vadinamos atitinkamai apatine trikampe matrica ir viršutine trikampe matrica.

Kvadratinė matrica, kurioje tik pagrindinės įstrižainės elementai nelygūs nuliui, o visi kiti – nuliai, vadinama įstrižainine, arba diagonaliąja, matrica.

9. Viena pagrindinių kvadratinės matricos charakteristikų yra jos determinantas, sudarytas iš tų pačių elementų. Jei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

tai

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Trikampių matricų ir diagonalinės matricos determinantai yra lygūs pagrindinės įstrižainės elementų sandaugai, o vienetinės matricos $detE = 1$.

10. Dvi matricos $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ir $B_{m\times n} = (b_{ij})$ vadinamos lygiomis, jei jos yra to paties tipo ir atitinkami elementai yra lygūs $a_{ij} = b_{ij}$, $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$.

11. Dviejų vienodo tipo matricų $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ suma $C = A+B$ vadinama to paties tipo matrica $C = (c_{ij})$, čia $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Analogiškai apibrėžiama matricų atimtis.

12. Matricos $A = (a_{ij})$ ir skaičiaus k sandauga vadinama matrica kA, kurios elementai lygūs ka_{ij}, t. y.

$$kA = Ak = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

13. Matricų $A = (a_{ij})_{m\times p}$ ir $B = (b_{ij})_{p\times n}$ sandauga vadinama matrica $C = A\cdot B = (c_{ij})_{m\times n}$, kurios elementas c_{ij} apskaičiuojamas pagal formulę:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Matricos C elementas c_{ij}, esantis i-tosios eilutės ir j-tojo stulpelio susikirtime, lygus matricos A i-tosios eilutės ir matricos B j-tojo stulpelio elementų sandaugų sumai. Dvi matricas A ir$B$ galima dauginti vieną iš kitos tik tada, kai pirmosios matricos stulpelių skaičius yra lygus antrosios matricos eilučių skaičiui. Trumpiau tariant, matricas galima dauginti, jei pirmoji yra $m \times p$ tipo, antroji $p \times n$ tipo, t. y. $A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = C_{m\times n}$. Matricų daugybai dažniausiai negalioja komutatyvumo dėsnis $A \cdot B \neq B \cdot A$.

14. Pagrindinės matricų daugybos dėsniai:

1) $A \cdot O = O \cdot A = O$,

2) $A \cdot E = E \cdot A = A$,

3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$,

4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,

5) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,

6) $(kA) \cdot B = A \cdot (kB) = k(A \cdot B)$, k – skaičius.

7) jei A ir B – to paties tipo kvadratinės matricos, tai

$$det(A \cdot B) = detA \cdot detB.$$

15. Parinkime matricoje A k eilučių ir k stulpelių. Iš elementų, esančių tų stulpelių sankryžose, sudarykime determinantą. Šis determinantas yra vadinamas matricos A k-tosios eilės minoru. Matrica yra rango r, jei tarp jos minorų egzistuoja bent vienas nelygus nuliui r-tosios eilės minoras, o visi $(r + 1)$-osios eilės minorai yra lygūs nuliui.

Matricos $(r+1)$-osios eilės minorą vadinsime r-tosios eilės minorą gaubiančiuoju minoru, jei į jį įeina visi r-tosios eilės minoro elementai.

PAVYZDŽIAI

3.1. Yra trys matricos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix};$$
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Rasti matricą $3A + 4B - 2C$.

Sprendimas. Šią matricą rasime taikydami 11 ir 12 apibrėžimus:

$$3A + 4B - 2C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 9 & -12 & 15 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 8 & 12 & 16 \\ 4 & -20 & 24 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} -6 & -8 & -10 \\ -2 & 6 & -4 \\ -16 & -12 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -4 \\ 15 & 6 & 27 \\ -6 & -29 & 29 \end{pmatrix}.$$

3.2. Gaminant tam tikrą įrenginį, reikia 5 A tipo, 6 B tipo ir 2 C tipo detalių. Tai trumpai galima užrašyti matrica-eilute $(5\ 6\ 2)$. Šių detalių kainos nurodytos matricoje-stulpelyje:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

Kokią prasmę turi šių matricų sandauga?

Sprendimas.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} = (5 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,3 + 2 \cdot 1,2) = (6,7).$$

Ši sandauga rodo įrenginio kainą.

3.3. Rasti sandaugas $A \cdot B$ ir $B \cdot A$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Matrica A – 2×3 tipo, o B – 3×2 tipo, todėl matricas galima sudauginti: $A_{2\times\underline{3}} \cdot B_{\underline{3}\times 2} = C_{2\times 2}$.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+4+1 & 0+12-1 \\ -4+0-1 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricas B ir A irgi galima sudauginti, bet čia gausime kito tipo matricą, t. y. $B_{3\times\underline{2}} \cdot A_{\underline{2}\times 3} = D_{3\times 3}$.

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+0 & -8+0 & 2+0 \\ 1+6 & 4+0 & -1+3 \\ -1+2 & -4+0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.4. Rasti sandaugas $A \cdot B$ ir $B \cdot A$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Matrica A – 3×2 tipo, o B – 2×4 tipo, todėl matricas galima sudauginti: $A_{3\times\underline{2}} \cdot B_{\underline{2}\times 4} = C_{3\times 4}$.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+9 & 4-12 & -2+6 & 0+3 \\ -1+6 & -2-8 & 1+4 & 0+2 \\ 1+3 & 2-4 & -1+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 & 3 \\ 5 & -10 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricos B negalima dauginti iš matricos A, nes pirmosios matricos stulpelių skaičius nelygus antrosios matricos eilučių skaičiui.

3.5. Rasti matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

rangą.

Sprendimas. Sudarome antrosios eilės minorą:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Visi gaubiantieji trečiosios eilė minorai:

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} M_3^3 &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & -15 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & -11 & -4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -7 \\ 5 & -6 & -21 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

$$M_3^4 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & 6 & -33 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^5 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^6 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Todėl matricos A rangas $r(A) = 2$.

UŽDAVINIAI

3.1. Rasti $3A + 2B$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$.

3.2. Rasti tokią matricą C, kad $A + 2C = 3B$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.3. Rasti a) $3A + B^T$ ir b) $2A^T + 3B$, kai

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ats.: a) $\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 14 & 10 \\ -21 & -15 \end{pmatrix}$; $\quad b) \begin{pmatrix} -1 & 21 & -28 \\ 10 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

3.4. Rasti a) $A \cdot B$ ir b) $B \cdot A$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ats.: a) $\begin{pmatrix} -1 & 21 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$; $\qquad b)$ $\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$.

3.5. Rasti a) $A \cdot B$ ir b) $B \cdot A$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ats.: a) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; $\qquad b)$ $\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

3.6. Rasti a) $A \cdot B$ ir b) $B \cdot A$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ats.: a) $\begin{pmatrix} 6 & 14 & 36 \\ 15 & 32 & 78 \end{pmatrix}$; $\qquad b)$ $\quad B \cdot A$ – negalima.

3.7. Ar teisinga lygybė $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ats.: Taip.

3.8. Rasti A^3, kai

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3.9. Rasti $f(A)$, kai $f(x) = 2x^3 - 3x + 5$ ir

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $\begin{pmatrix} 30 & 70 \\ 105 & 205 \end{pmatrix}.$

3.10. Rasti $f(A) - 2\varphi(A)$, kai $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad \varphi(x) = 3x + 5$ ir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -20 \end{pmatrix}.$

3.11. Nustatyti, kurias matricų $A,\ B,\ C$ ir D poras galima sudauginti, ir apskaičiuoti jų sandaugas, kai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ats.:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad D \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 8 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.12. Duotos matricos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Įrodyti, kad $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Ats.: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}; \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$

3.13. Duotos matricos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 \\ 1-a & 0 & b^2-c \\ 1-a^2 & c-b^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Įrodyti, kad $A + B - B^T = 0$.

3.14. Duotos matricos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Įrodyti, kad $A \cdot B = 0$.

3.15. Duotos matricos eilutės $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ir $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Rasti $A^T \cdot B$.

Ats.: $A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}$.

3.16. Duota matrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ir matrica-eilutė $B = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Rasti $A \cdot B^T$.

Ats.: $A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.17. Apskaičiuoti matricos A rangą, kai

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $r(A) = 2$.

3.18. Apskaičiuoti matricos A rangą, kai

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $r(A) = 2$.

3.19. Apskaičiuoti matricos A rangą, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $r(A) = 3$.

3.20. Apskaičiuoti matricos A rangą, kai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $r(A) = 4$.

4. ATVIRKŠTINĖ MATRICA

Turime matricą

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matrica B vadinama atvirkštine matricai A ir žymima $B = A^{-1}$, jeigu $B \cdot A = A \cdot B = E$, čia E – vienetinė matrica. Taigi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Kvadratinė matrica A vadinama neišsigimusia, jei $detA \neq 0$. Kiekviena neišsigimusi matrica visada turi atvirkštinę.

Matricos A prijungtine vadinama matrica

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

čia A_{ij} – matricos A elementų a_{ij} – adjunktai $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Neišsigimusios matricos A atvirkštinė matrica A^{-1} lygi

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \widetilde{A}. \qquad (4.1)$$

Savybės:

1) $det(A \cdot A^{-1}) = detA \cdot detA^{-1} = detE = 1$, taigi $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$.

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Matricos elementariais pertvarkiais vadinamos tokios operacijos:

1) matricos eilučių sukeitimas vietomis;

2) visų eilutės elementų dauginimas iš nelygaus nuliui skaičiaus;

3) vienos eilutės elementų pridėjimas prie kurios nors kitos šios matricos eilutės atitinkamų elementų.

Galimos kelių pertvarkių kombinacijos.

Dvi matricos vadinamos ekvivalenčiomis, jei vieną galima gauti iš kitos baigtinio skaičiaus elementarių pertvarkių būdu. Tokiu atveju rašome $A \sim B$.

Atvirkštinę matricą galime rasti Gauso metodu, kurio esmę sudaro tai, kad greta turimos matricos A užrašome vienetinę matricą E ir su abiem matricomis atliekame elementarius eilučių pertvarkius. Kai iš matricos A gausime vienetinę, tai vienetinės matricos vietoje gausime atvirkštinę matricą: $(A|E) \sim \cdots \sim (E|A^{-1})$.

PAVYZDŽIAI

4.1. Rasti atvirkštinę matricą A^{-1} matricai A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Rasime matricą A atitinkančio determinanto reikšmę:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Vadinasi, atvirkštinė matrica egzistuoja. Apskaičiuosime adjunktus:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \\
A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3, \\
A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3, \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,
\end{aligned}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pagal formulę (4.1), užrašysime atvirkštinę matricą:

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Patikriname, ar teisingai ją suradome:

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

4.2. Gauso metodu rasime matricą, atvirkštinę matricai

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Greta turimos matricos užrašome vienetinę matricą ir atliekame elementarius pertvarkius. Mūsų tikslas – iš matricos A gauti vienetinę matricą. Norint vietoje elemento a_{11} gauti 1, reikia antrąją eilutę padauginti iš (-1) ir pridėti prie pirmosios, t. y.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Toliau pirmame stulpelyje vietoje elementų $a_{21} = 2$ ir $a_{31} = 5$ reikia gauti nulius. Tam pirmąją eilutę padauginame iš (-2) ir pridedame prie antrosios eilutės bei iš (-5) ir pridedame prie trečiosios eilutės:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Antrame stulpelyje vietoje elemento $a_{32} = (-3)$ reikia gauti nulį, todėl antrąją eilutę dauginame iš 3 pridedame prie trečiosios:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 14 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Toliau vietoje elemento $a_{33} = 5$ reikia gauti 1, todėl trečiąją eilutę dauginame iš $\frac{1}{5}$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5} & \frac{14}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \sim$$

Iš matricos A jau gavome trikampę matricą. Dabar analogiškai paversime nuliais elementus, esančius virš pagrindinės įstrižainės. Taigi trečiąją eilutę padauginsime iš (-1) ir pridėsime prie antrosios, o paskui antrąją, padauginę iš (-1), pridėsime prie pirmosios eilutės:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5} & \frac{14}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5} & \frac{14}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right).$$

Vietoje matricos A turime vienetinę, o vietoje vienetinės matricos gavome atvirkštinę, t. y.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{11}{5} & \frac{14}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

Patikriname, ar teisingai suradome A^{-1}. Apskaičiuojame sandaugą $A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 14 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12+4-11 & -18+4+14 & 3-4+1 \\ 8+3-11 & 12+3+14 & 2-3+1 \\ 20+2-22 & -30+2+28 & 5-2+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$A \cdot A^{-1} = E$. Atvirkštinė matrica rasta teisingai.

UŽDAVINIAI

4.1. Rasti matricą, atvirkštinę matricai:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $A = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 12 \\ -7 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

4.2. Rasti matricą, atvirkštinę matricai:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $A = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.3. Rasti matricą, atvirkštinę matricai:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.4. Rasti matricą, atvirkštinę matricai:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.5. Nustatyti, kokioms λ reikšmėms matrica

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

turi atvirkštinę matricą A^{-1}.

Ats.: A^{-1} egzistuoja, jei $\lambda \neq 0$ ir $\lambda \neq \pm\sqrt{5}$.

5. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ SPRENDIMAS ATVIRKŠTINĖS MATRICOS METODU

Tiesinių lygčių sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (a_{ij},\ b_i \in R) \quad (i,j = 1,2,\dots,n)$$

gali būti parašyta matricine forma:

$$A \cdot X = B,$$

čia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Kai sistemos $detA \neq 0$, tai matricai A egzistuoja atvirkštinė matrica, ir sistema turi vienintelį sprendinį, randamą pagal formulę:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Tuo atveju, kai $detA = 0$, A^{-1} neegzistuoja, atvirkštinės matricos metodu lygčių sistemos išspręsti negalima.

PAVYZDŽIAI

5.1. Išspręsti tiesinių lygčių sistemą atvirkštinės matricos metodu:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 1, \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Sprendimas. Užrašome šią sistemą matricine forma $A \cdot X = B$, kur

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ieškosime A^{-1} pagal formulę (4.1):

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -12,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pagal formulę $X = A^{-1} \cdot B$, gauname:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-24+15 \\ -1+34-21 \\ 0-4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ats.: $(-8;\ 12;\ -1)$.

5.2. Išspręsti matricines lygtis $A \cdot X = B$ ir $Y \cdot A = B$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Padauginę iš kairės lygtį $A \cdot X = B$ iš matricos A^{-1}, gausime: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, bet $A^{-1} \cdot A = E$, tai $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Analogiškai padauginę iš dešinės lygtį $Y \cdot A = B$ iš matricos A^{-1}, gausime: $Y = B \cdot A^{-1}$. Vadinasi, norint surasti X ir Y, reikia rasti atvirkštinę matricą A^{-1}. Rasime matricos A determinantą ir adjunktus:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{11} = 3; \quad A_{12} = -1; \quad A_{21} = -5; \quad A_{22} = 2,$$

tai

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tada

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$Y = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

UŽDAVINIAI

5.1. Matricų metodu išspręsti tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 + \ x_3 = 8, \\ \ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + \ x_2 - 7x_3 = -4. \end{cases}$$

Ats.: $(2;\ -3;\ 1)$.

5.2. Matricų metodu išspręsti tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 \qquad\quad = 1, \\ \qquad - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 \qquad\quad + \ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ats.: $(2;\ -1;\ 0)$.

5.3. Matricų metodu išspręsti tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + \ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \ x_4 = 2. \end{cases}$$

Ats.: $(-2;\ 5;\ -3;\ 1)$.

5.4. Išspręsti matricines lygtis $A \cdot X = B$ ir $Y \cdot A = B$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 0 \\ 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 5 \\ -82 & 13 & 44 \\ 10 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$

5.5. Rasti matricą X, su kuria galioja lygybė $A \cdot X = B$, kai

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

5.6. Išspręsti matricinę lygtį:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

5.7. Išspręsti matricinę lygtį:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

5.8. Išspręsti matricinę lygtį:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $X = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$.

6. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ SPRENDIMAS GAUSO METODU

Turime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (a_{ij},\ b_i \in R)$$

Sprendžiant lygčių sistemą Gauso metodu, patogu sistemos matricą, sudarytą iš koeficientų prie nežinomųjų, ir laisvųjų narių stulpelį surašyti lentelėje, kuri vadinama išplėstine matrica:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Atlikdami su šios matricos eilučių elementais elementarius pertvarkius, iš turimos matricos gauname viršutinę trikampę matricą (kai $m = n$):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right)$$

arba trapecinę matricą:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a'_{rk} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b'_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b'_m \end{array} \right).$$

Iš gautosios ekvivalenčios matricos užrašome paprastesnę trikampę arba trapecinę lygčių sistemą. Jei pertvarkome į trikampį pavidalą, tuomet iš paskutiniosios lygties galima išreikšti x_n, iš priešpaskutiniosios x_{n-1} ir t. t. Šis sprendinys yra vienintelis sistemos sprendinys. Kai pertvarkome į trapecinį pavidalą, galimi du atvejai:

1) jei bent vienas $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ nelygus nuliui, lygčių sistema sprendinių neturi;

2) jei visi $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ lygūs nuliui, sistema turi be galo daug sprendinių. Nežinomųjų $x_{r+1}, \ldots, x_m$, kurie vadinami laisvaisiais nežinomaisiais, reikšmes pasirenkame laisvai, o nežinomuosius $x_1, x_2, \ldots, x_r$, kurie vadinami baziniais, išreiškiame laisvaisiais nežinomaisiais. Taip gaunamas bendrasis lygčių sistemos sprendinys. Bendrąjį sprendinį atitinka vienas bazinis sprendinys, kuris gaunamas iš bendrojo, suteikus laisviesiems nežinomiesiems reikšmes, lygias nuliui.

Pertvarkant lygčių sistemą į jai ekvivalenčią sistemą elementariais pertvarkiais, baziniais nežinomaisiais tampa nebūtinai pirmieji r. Galima gauti ir kitą bazinių nežinomųjų rinkinį. Tai priklauso nuo sistemos koeficientų ir pasirinktos elementarių pertvarkių schemos.

Jei aiškinamasis tekstas apie matricų elementarius pertvarkius nerašomas, tai pertvarkytos matricos jungiamos ekvivalentumo ženklu $\sim$.

Kronekerio ir Kapelio teorema. Sistema išsprendžiama (suderinta) tik tada, kai matricų A ir $\overline{A}$ rangai sutampa, t. y. kai $r(A) = r(\overline{A}) = r$.

Tuo atveju, kai:

1) $r = m = n$, sistema turi vienintelį sprendinį;

2) $r < n$, sistema turi be galo daug sprendinių. Šiuo atveju $(n - r)$ nežinomųjų yra laisvi. Nemažindami bendrumo, sakykime, kad nežinomieji $x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots,\ x_n$ yra laisvieji nežinomieji, o $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$ – baziniai. Sprendinys $(b'_1,\ b'_2,\ \ldots,\ b'_r,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ vadinamas baziniu.

Jeigu $r(A) \neq r(\overline{A})$, tai sistema sprendinių neturi ir nereikia jos spręsti.

PAVYZDŽIAI

6.1. Nustatyti, ar suderinta lygčių sistema:

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 - 4x_3 = 5, \\ \;\; x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Sprendimas. Nustatysime šios lygčių sistemos matricos A ir išplėstinės matricos $\overline{A}$ rangus:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 7 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim$$

Patogumo dėlei išplėstinėje matricoje laisvuosius narius atskiriame nuo koeficientų prie nežinomųjų vertikaliuoju brūkšniu. Elementai, esantys kairėje brūkšnio pusėje, sudaro matricą A, todėl iš karto galėsime nustatyti ir matricos A rangą. Turime atlikti elementarius pertvarkius eilutėse. Gauname trapecinę matricą. Pirmiausia sukeičiame vietomis pirmąją ir antrąją eilutes, o paskui, pirmąją eilutę padauginę iš (-7) ir (-2), pridedame prie antrosios ir trečiosios eilučių, t. y.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & -2 \\ 0 & 6 & -18 & -2 \end{array} \right) \sim$$

Čia antrąją ir trečiąją eilutes sukeitėme vietomis. Dabar antrąją eilutę padauginame iš (-2) ir pridedame prie trečiosios:

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Iš matricos $\overline{A}$ pirmojo, antrojo ir ketvirtojo stulpelių elementų galime sudaryti nelygų nuliui trečiosios eilės minorą:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

todėl $r(\overline{A}) = 3$.

Iš matricos A elementų ($\overline{A}$ elementų, esančių iki vertikaliojo brūkšnio) galime sudaryti tik antrosios eilės minorą, kuris būtų nelygus nuliui, pvz.:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

todėl $r(A) = 2$.

$r(A) \neq r(\overline{A})$, todėl sistema nesuderinta.

6.2. Gauso metodu išspręsti lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Sprendimas. Patogiausia antrąją lygtį rašyti pirmojoje eilutėje, nes jos koeficientas prie x_1 yra vienetas. Tai turėdami mintyje, iš turimos sistemos koeficientų ir laisvųjų narių sudarome išplėstinę matricą:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

Pirmosios eilutės nekeisime, prie antrosios pridėsime pirmąją, padaugintą iš (-2), o prie trečiosios – pirmąją, padaugintą iš (-3). Gausime matricą:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & 2 \end{array}\right).$$

Dabar galima pirmosios ir antrosios eilutės nekeisti, o prie trečiosios pridėti antrąją, padaugintą iš (-1). Gauname:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Iš gautosios matricos matyti, kad ši lygčių sistema sprendinių neturi, nes paskutinė eilutė atitinka lygtį:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1,$$

kuri neturi nė vieno sprendinio. Be to, $r(A) = 2$, o $r(\overline{A}) = 3$. Pagal Kronekerio ir Kapelio teoremą, kai $r(A) \neq r(\overline{A})$, sistema sprendinių neturi.

Ats.: Ø.

6.3. Išspręsti keturių lygčių sistemą su trimis nežinomaisiais:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \ \ x_3 = 2, \\ \ \ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 \qquad\ \ - 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Sprendimas. Antrosios lygties koeficientus ir laisvąjį narį rašydami pirmojoje eilutėje, sudarome matricą:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Šią matricą pertvarkome taip: pirmosios eilutės nekeičiame, prie antrosios pridedame pirmąją, padaugintą iš (-2), prie trečiosios – pirmąją, padaugintą iš (-3), o prie ketvirtosios – pirmąją, padaugintą iš (-2). Gauname:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ 0 & 3 & -7 & 2 \end{array}\right).$$

Dabar pirmosios ir antrosios eilučių nekeičiame, o prie trečiosios ir ketvirtosios pridedame antrąją, padaugintą iš (-3). Gauname:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Pirmųjų trijų eilučių nekeisdami, prie ketvirtosios pridedame trečiąją, padaugintą iš 2:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 3 = n$, todėl sistema turi vieną sprendinį.

Pereidami prie paskutinės matricos, išbraukėme ketvirtąją eilutę, kurios visi elementai lygūs nuliui, o trečiosios eilutės elementus padauginome iš (-1).

Iš paskutiniosios matricos sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ \qquad\; x_2 - 3x_3 = 0, \\ \qquad\qquad\;\; x_3 = 1, \end{cases}$$

kuri ekvivalenti turimai sistemai. Iš jos paeiliui apskaičiuojame:

$$x_3 = 1; \quad x_2 = 0 + 3x_3 = 3; \quad x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 = 2.$$

Ats.: $(2;\ 3;\ 1)$.

6.4. Išspręsti keturių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 + \;\, x_2 - x_3 + 4x_4 = 5, \\ \qquad\;\; 2x_2 + x_3 + \;\, x_4 = 2, \\ \;\, x_1 + \;\, x_2 + x_3 + \;\, x_4 = 3, \\ 3x_1 \qquad\quad - x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudarydami išplėstinę matricą, trečiosios lygties koeficientus ir laisvąjį narį rašysime pirmojoje eilutėje:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Sudarydami paskutinę matricą, pirmosios ir trečiosios eilučių nekeitėme, prie antrosios pridėjome pirmąją, padaugintą iš (-2), o prie ketvirtosios – pirmąją, padaugintą iš (-3).

Nekeisdami pirmosios ir antrosios eilučių, prie trečiosios pridėdami antrąją, padaugintą iš 2, o prie ketvirtosios – antrąją, padaugintą iš (-3), gauname:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Paskutinė matrica gauta, prie ketvirtosios eilutės pridėjus trečiąją. Dabar išbraukiame ketvirtąją eilutę, antrąją padauginame iš (-1), o trečiąją padalijame iš (-5). Gauname matricą:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 3 < n = 4$, todėl sistema turi be galo daug sprendinių ir $n - r = 4 - 3 = 1$ nežinomųjų yra laisvi. Paskutinę matricą atitinka lygčių sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ \phantom{x_1 + x_2 + 3{}} x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Iš šios sistemos paeiliui randame: $x_3 = x_4;\ x_2 = 1 - x_4;\ x_1 = 2 - x_4$. Vadinasi, gauname pradinės sistemos bendrąjį sprendinį:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_4, \\ x_2 = 1 - x_4, \\ x_3 = x_4, \end{cases}$$

čia x_4 yra laisvasis nežinomasis, o $x_1,\ x_2,\ x_3$ – baziniai nežinomieji. Imdami $x_4 = 0$, gauname bazinį sprendinį $(2,\ 1,\ 0,\ 0)$. Kitus sprendinius randame, pasirinkę kitas x_4 reikšmes: pvz., kai $x_4 = 1$, gauname sprendinį $(1,\ 0,\ 1,\ 1)$, kai $x_4 = 6$, – sprendinį $(-4,\ -5,\ 6,\ 6)$ ir t. t.

Ats.: $\{(2 - x_4;\ 1 - x_4;\ x_4;\ x_4) | \forall x_4 \in R\}$.

6.5. Išspręsti tiesinių homogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš lygčių koeficientų ir laisvųjų narių sudarome išplėstinę matricą ir ją perdirbame:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Vadinasi, turimai lygčių sistemai ekvivalenti tokia homogeninių lygčių sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Iš čia randame bendrąjį turimos lygčių sistemos sprendinį:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_4, \\ x_2 = -2x_4, \\ x_3 = -2x_4. \end{cases}$$

Ats.: $\{(3x_4;\ -2x_4;\ -2x_4;\ x_4) | \forall x_4 \in R\}$.

6.6. Išspręsti tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš lygčių koeficientų ir laisvųjų narių sudarome išplėstinę matricą ir ją pertvarkome:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right).$$

Matricos A rangas $r(A) = 2$, nes galima sudaryti tik antrosios eilės minorus, nelygius nuliui, pvz.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Matricos $\overline{A}$ rangas $r(\overline{A}) = 3$, nes minoras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$r(A) \neq r(\overline{A})$, todėl sistema sprendinių neturi.

Kad sistema neturi sprendinių, galima matyti ir iš gautosios matricos paskutinės eilutės. Ši eilutė atitinka lygtį $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -4$, kuri neturi nė vieno sprendinio.

Ats.: Ø.

7. LYGČIŲ SISTEMŲ SPRENDIMAS GAUSO – ŽORDANO METODU

Turime tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (a_{ij},\ b_i \in R)$$

Gauso–Žordano metodas skiriasi nuo Gauso metodo pirmiausia tuo, kad vienetai daromi nebūtinai įstrižainėje, o nuliai ne tik žemiau vienetų, bet ir aukščiau jų. Sprendžiant sistemą Gauso–Žordano metodu, koeficientus ir laisvuosius narius patogu surašyti lentelėje. Be to, patogu lygtis sunumeruoti (pvz.: e1, e2 ir t. t.) . Lentelės pagrindinę dalį sudaro koeficientai prie nežinomųjų. Paskui užrašome laisvųjų narių stulpelį. Sprendimui kontroliuoti patogu įvesti dar vieną stulpelį $\sum$, kurio elementai yra lygūs atitinkamos eilutės elementų sumai, t. y. $\sigma_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i,\ (i = 1, 2, \ldots, m)$. Paskutiniame lentelės stulpelyje simboliškai užrašytas veiksmas, atliekamas su atitinkama eilute (pvz., jei prie antrosios eilutės reikia pridėti pirmosios eilutės elementus, padaugintus iš 3, tai užrašome e2+3e1). Galima vadovautis tokia sprendimo schema:

1. Tarp koeficientų prie nežinomųjų parenkamas bet kuris nelygus nuliui elementas, vadinamas pagrindiniu elementu (lentelėje jis paryškintas). Eilutė, kurioje yra šis elementas, vadinamas pagrindine eilute, o stulpelis – pagrindiniu stulpeliu. Tokią eilutę pažymėsime *.
2. Pagrindinę eilutę padalijame iš pagrindinio elemento.
3. Prie likusiųjų eilučių pridedame pagrindinę eilutę, padaugintą iš tokio skaičiaus, kad pagrindiniame stulpelyje gautume nulius. Tokiu būdu gauname lentelę L2.
4. Lentelėje L2 pagrindinį elementą parenkame iš kitos eilutės ir vėl kartojame tą pačią sprendimo schemą.
5. Skaičiavimai lentelėje baigti, kai visos eilutės yra pažymėtos arba kai gauname eilutę, kurios elementai pagrindinėje lentelės dalyje yra lygūs nuliui, o elementas laisvųjų narių stulpelyje nelygus nuliui. Pastaruoju atveju darome išvadą, kad sistema sprendinių neturi. Jei sprendimo metu gauname eilutę, sudarytą tik iš nulių, tai pašaliname ją iš lentelės.
6. Skaičiavimai kontroliuojami skaičiuojant $\sum$ stulpelio elementus dviem būdais: 1) su šio stulpelio elementais atliekame tuos pačius veiksmus, kaip

ir su kitais atitinkamos eilutės elementais; 2) sudedame naujai gautos eilutės elementus. Jei gautas kontrolės stulpelio skaičius sutampa su šios eilutės visų koeficientų suma, tai naujos lentelės eilutė apskaičiuota teisingai.

PAVYZDŽIAI

7.1. Išspręsti Gauso–Žordano metodu tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Sprendimas. Sistemos duomenis užrašome lentelėje ir atliekame elementarius pertvarkius.

		x_1	x_2	x_3	b	$\sum$	
*	e1	**1**	2	3	5	11	
L1	e2	2	1	–1	–1	1	e2–2e1
	e3	3	–5	–2	4	1	e3–3e1
	e1	1	2	3	5	11	
	e2	0	–3	–7	–11	–21	∗(–1) e2
	e3	0	–11	–11	–11	–33	:(–11)e3
*	e1	1	2	3	5	11	e1–2e3
L2	e2	0	3	7	11	21	e2–3e3
*	e3	0	**1**	1	1	3	
	e1	1	0	1	3	5	
	e2	0	0	4	8	12	:(4)e2
	e3	0	1	1	1	3	
*	e1	1	0	1	3	5	e1–e2
L3 *	e2	0	0	**1**	2	3	
*	e3	0	1	1	1	3	e3–e2
	e1	1	0	0	1	2	
L4	e2	0	0	1	2	3	
	e3	0	1	0	–1	0	

Iš lentelės L4 gauname, kad $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1.$

Ats.: $(1;\ -1;\ 2)$.

7.2. Išspręsti Gauso–Žordano metodu tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = 3, \\ 2x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Sprendimas. Sistemos duomenis užrašome lentelėje ir atliekame elementarius pertvarkius:

		x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$	
	e1	3	–2	–1	1	3	4	e1–3e3
L1	e2	2	–1	–3	4	4	6	e2–2e3
*	e3	**1**	–1	2	–3	1	0	
*	e1	0	**1**	–7	10	0	4	
L2	e2	0	1	–7	10	2	6	e2–e1
*	e3	1	–1	2	–3	1	0	
	e1	0	1	–7	10	0	4	
L3	e2	0	0	0	0	2	2	
	e3	1	0	–5	7	1	4	

Lentelės L3 antroji eilutė atitinka lygtį $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 2$, kuri neturi sprendinių, todėl sistema nesuderinta. Nesunku pastebėti, kad $r(A) = 2$, o $r(\overline{A}) = 3$.

Ats.: Ø.

7.3. Išspręsti Gauso–Žordano metodu tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \ \ x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 1, \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Sprendimas. Sistemos duomenis užrašome lentelėje ir atliekame elementarius pertvarkius:

		x_1	x_2	x_3	b	$\sum$	
*	e1	**1**	2	–1	1	3	
L1	e2	3	1	3	2	9	e2–3e1
	e3	4	3	2	3	12	e3–4e1
	e4	2	–1	4	1	6	e4–2e1
	e1	1	2	–1	1	3	
L2	e2	0	–5	6	–1	0	
	e3	0	–5	6	–1	0	e3–e2
	e4	0	–5	6	–1	0	e4–e2
	e1	1	2	–1	1	3	
L3	e2	0	–5	6	–1	0	:(–5)e2
	e3	0	0	0	0	0	
	e4	0	0	0	0	0	
L4 *	e1	1	2	–1	1	3	e1–2e2
*	e2	0	**1**	$-\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	
	e1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	3	
L5	e2	0	1	$-\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	

Kadangi $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < n = 3$, tai sistema turi be galo daug sprendinių $(n - r = 3 - 2 = 1)$ ir vienas kintamasis yra laisvas. Iš lentelės L5 matome, kad x_1 ir x_2 yra baziniai kintamieji, o x_3 – laisvasis kintamasis.

Lentelę L5 atitinka tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{7}{5}\,x_3 = \dfrac{3}{5}, \\ x_2 - \dfrac{6}{5}\,x_3 = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Iš čia

$$x_1 = \frac{3}{5} - \frac{7}{5}\,x_3; \quad x_2 = \frac{1}{5} + \frac{6}{5}\,x_3.$$

Bazinis sprendinys $\left(\dfrac{3}{5};\ \dfrac{1}{5};\ 0\right)$.

Ats.: $\left\{\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{7}{5}\,x_3;\ \dfrac{1}{5} + \dfrac{6}{5}\,x_3;\ x_3\right)\middle|\forall x_3 \in R\right\}$.

UŽDAVINIAI

Gauso arba Gauso–Žordano metodu išspręsti šias lygčių sistemas:

7.1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

Ats.: $(-1;\ 0;\ 1)$.

7.2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

Ats.: $\{(x_1;\ 7 - 3x_1;\ 18 - 7x_1) | \forall x_1 \in R\}$.

7.3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

Ats.: $\emptyset$.

7.4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

Ats.: $(2;\ 1;\ 5;\ -3)$.

7.5.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Ats.: $\left\{ \left(\frac{1}{8}\, x_3 - \frac{1}{2}\, x_4 + \frac{11}{8};\ \frac{11}{8}\, x_3 - \frac{1}{2}\, x_4 + \frac{1}{8};\ x_3;\ x_4 \right) \middle| \forall x_3,\ x_4 \in R \right\}$,

7.6.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + \ \ 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 - \ \ 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + \ \ 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 + 11x_4 = 6. \end{cases}$$

Ats.: Ø.

7.7.
$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ats.: $\{(t;\ 9t;\ 7t)|\forall t \in R\}$.

7.8.
$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Ats.: Ø.

7.9.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = -3, \\ 3x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

Ats.: $(1;\ -1;\ 2;\ 0)$.

7.10.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Ats.: $\{(10 - 10t;\ t;\ 15 - 16t;\ 4 - 5t)|\forall t \in R\}$.

7.11.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 5x_2 - 6x_3 + \ \ x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Ats.: $\{(t;\ t;\ t;\ t)|\forall t \in R\}$.

7.12.
$$\begin{cases} 2x_1 \quad\quad\; + \; x_3 + \; x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad\; + \; x_4 = 4, \\ x_1 + \; x_2 + 2x_3 \quad\quad = 4, \\ 2x_1 + \; x_2 - \; x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Ats.: $\left\{\left(\dfrac{12-5t}{7};\ \dfrac{8-t}{7};\ \dfrac{4+3t}{7};\ t\right)\middle|\forall t \in R\right\}$.

7.13.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \; x_3 + \; x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + \; x_3 - 3x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - \; x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Ats.: Ø.

7.14.
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + \; x_4 = 5, \\ x_1 - \; x_2 - \; x_3 \quad\quad = 2, \\ 4x_1 + \; x_2 + \; x_3 - 5x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + \; x_3 - \; x_4 = -3. \end{cases}$$

Ats.: $\{(t+1;\ t-1;\ 0;\ t)|\forall t \in R\}$.

7.15.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad = 6, \\ \quad\quad x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 \quad\quad + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

Ats.: $(1;\ 2;\ 3;\ 4)$.

7.16.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \; x_3 - \; x_4 = 6, \\ 2x_1 + \; x_2 - \; x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - \; x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \; x_4 = 4, \\ x_1 + \; x_2 + \; x_3 + \; x_4 = 7. \end{cases}$$

Ats.: Ø.

7.17.
$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 - 3x_4 = 3, \\ \qquad\quad x_2 + 6x_3 + \ \ x_4 = 8. \end{cases}$$

Ats.: $\{(3 - 2t;\ 5t - 4;\ 2 - t;\ t) | \forall t \in R\}$.

7.18.
$$\begin{cases} 5x_1 \qquad\quad + \ \ x_3 - 3x_4 = 3, \\ \ x_1 - 2x_2 \qquad\ \ + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 - 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Ats.: Ø.

8. VEIKSMAI SU VEKTORIAIS

Kryptinė atkarpa vadinama vektoriumi. Vektorius žymimas $\overrightarrow{AB}$, taškas A yra pradžia, taškas B – galas (vektorius žymimas ir viena raide $\overrightarrow{a}$).

Nuliniu vektoriumi $\overrightarrow{0}$ vadinamas vektorius, kurio pradžia ir galas sutampa.

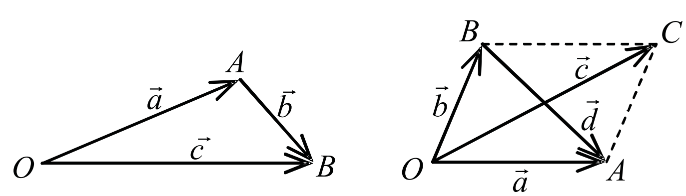
Atstumas tarp vektoriaus pradžios ir pabaigos vadinamas vektoriaus moduliu arba ilgiu ir žymimas $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{a}|$ arba be rodyklės AB, a.

1. Du nenuliniai vektoriai vadinami kolineariaisiais, jei jie yra toje pačioje arba lygiagrečiose tiesėse.

2. Vektoriai vadinami komplanariaisiais, jei yra toje pačioje arba lygiagrečiose plokštumose.

3. Du vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ lygūs, kai jų moduliai lygūs, jie yra kolinearūs ir jų kryptys sutampa.

4. Sakykime, žinomi vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$. Pasirinkime bet kurį tašką O ir atidėkime nuo jo vektorių $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, o paskui nuo taško A atidėkime $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ (1 brėž.). Vektorius $\overrightarrow{OB}$, jungiąs vektoriaus $\overrightarrow{a}$ pradžią su vektoriaus $\overrightarrow{b}$ galu, vadinamas vektorių $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ suma (trikampio taisyklė). Rašome: $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, arba $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$. Sudedant du nekolinearius vektorius, patogu taikyti lygiagretainio taisyklę. Nuo bet kurio taško O atidedame vektorius $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$. Sudaromas lygiagretainis $AOBC$. Vektorius $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$ (OC – lygiagretainio įstrižainė) yra vektorių $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ suma.

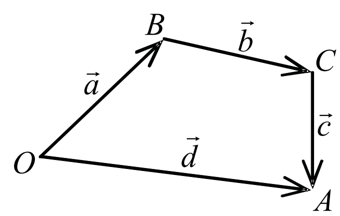


1 brėž.

5. Kai vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ turi bendrą pradžią, tai vektorius $\overrightarrow{d}$ (1 brėž.),

jungiąs vektorių $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ galus ir nukreiptas iš $\overrightarrow{b}$ galo į $\overrightarrow{a}$ galą, vadinamas vektorių $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ skirtumu. Rašome: $\overrightarrow{d}$ = $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

6. Nuo bet kurio taško O atidėkime vektorių $\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{a}$, tada nuo taško A atidėkime vektorių $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{b}$, paskui $\overrightarrow{BC}$ = $\overrightarrow{c}$ (2 brėž.). Tada $\overrightarrow{a}$ + $\overrightarrow{b}$ + $\overrightarrow{c}$ = $\overrightarrow{d}$ = $\overrightarrow{OC}$, t. y. kelių vektorių suma yra vektorius, jungiantis pirmojo vektoriaus pradžios tašką su paskutiniojo vektoriaus galo tašku. Ši taisyklė vadinama daugiakampio taisykle .



2 brėž.

7. Jei vektoriai $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ sudaro uždarąjį daugiakampį, tai jų suma yra nulinis vektorius, t. y. $\overrightarrow{a}$ + $\overrightarrow{b}$ + $\overrightarrow{c}$ + $\overrightarrow{d}$ = $\overrightarrow{0}$.

8. Vektoriaus $\overrightarrow{a}$ ir skaičiaus λ sandauga vadinamas toks vektorius $\overrightarrow{b}$, kurio ilgis $|\overrightarrow{b}|$ = $|\lambda|$ $|\overrightarrow{a}|$, o kryptis sutampa su vektoriaus $\overrightarrow{a}$ kryptimi, kai $\lambda > 0$. Priešinga vektoriaus $\overrightarrow{a}$ krypčiai, kai $\lambda < 0$. Jei $\lambda = 0$, gauname nulinį vektorių. Kitaip tariant, vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ yra kolinearūs. Vektoriaus daugyba iš skaičiaus užrašoma taip: $\overrightarrow{b}$ = λ $\overrightarrow{a}$.

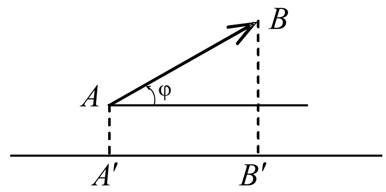
9. Lygybė $\overrightarrow{b}$ =λ $\overrightarrow{a}$ (λ – skaičius) yra vektorių kolinearumo sąlyga.

10. Vektoriaus $\overrightarrow{a}$ modulį pažymėję $|\overrightarrow{a}| = a$, o jo kolinearųjį tos pačios krypties vienetinį vektorių pažymėję $\overrightarrow{a}^o$, turėsime $\overrightarrow{a} = a\,\overrightarrow{a}^o$.

11. Vektoriaus $\overrightarrow{a}$ projekcija ašyje t (3 brėž.) žymima $pr_t\overrightarrow{a}$ arba a_t.

$$a_t = pr_t\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi,$$

čia φ – kampas tarp vektoriaus $\overrightarrow{a}$ ir ašies t.

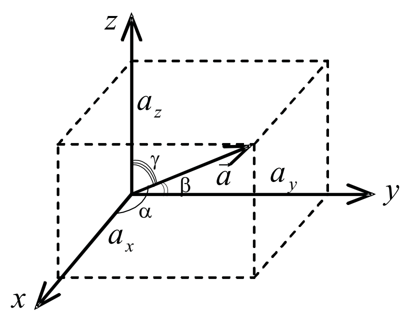


3 brėž.

12. $pr_t(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = pr_t\overrightarrow{a} + pr_t\overrightarrow{b} + pr_t\overrightarrow{c}$.

13. $pr_t\lambda\overrightarrow{a} = \lambda pr_t\overrightarrow{a}$, (λ – skaičius).

14. Stačiakampėje koordinačių sistemoje vektoriaus $\overrightarrow{a}$ projekcijas koordinačių ašyse žymime $a_x,\ a_y,\ a_z$ ir vadiname jo koordinatėmis (4 brėž.). Rašome $\overrightarrow{a} = (a_x; a_y; a_z)$.



4 brėž.

15. Jeigu vektorius $\overrightarrow{a}$ su x ašimi sudaro kampą α, su y – kampą β ir su z – kampą γ, tai

$$a_x = |\overrightarrow{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\overrightarrow{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\overrightarrow{a}|\cos\gamma.$$

16. $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ vadinami vektoriaus $\overrightarrow{a}$ krypties kosinusais ir

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

17. Jei $|\overrightarrow{a}| = 1$, tai $\overrightarrow{a}$ vadinamas vienetiniu vektoriumi ir žymimas $\overrightarrow{a}^o$. Jo koordinatės:

$$a_x^o = \cos\alpha, \quad a_y^o = \cos\beta, \quad a_z^o = \cos\gamma.$$

18. Kai $\overrightarrow{a} = (a_x; a_y; a_z)$, tai vektoriaus ilgis:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

19. Kai $\overrightarrow{a} = (a_x; a_y; a_z)$ ir $\overrightarrow{b} = (b_x; b_y; b_z)$, tai

$$(\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b}) = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z).$$

20. Jei

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z},$$

tai vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ yra kolinearūs.

21. Jei vektoriaus $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ pradžios ir galo koordinatės yra $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ir $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, tai

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1$$

ir

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

22. Tarkime, turime erdvėje tris nekomplanariuosius vienetinius vektorius $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}$ ($|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = |\overrightarrow{e_3}| = 1$). Kiekvieną ketvirtąjį vektorių galima užrašyti vektorių $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}$ tiesiniu dariniu:

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3}.$$

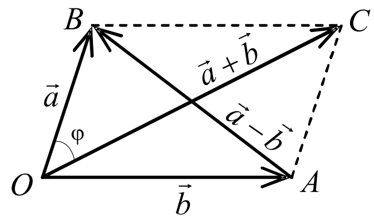
Stačiakampėje koordinačių sistemoje vienetinis vektorius x ašyje žymimas $\overrightarrow{i}$; y ašyje – $\overrightarrow{j}$; z ašyje – $\overrightarrow{k}$ ($|\overrightarrow{i}| = |\overrightarrow{j}| = |\overrightarrow{k}| = 1$ ir vienetinių vektorių kryptys sutampa su ašių kryptimis). Tada kiekvieną trimatės erdvės vektorių galima užrašyti:

$$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}.$$

PAVYZDŽIAI

8.1. Vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ sudaro kampą $\varphi = 60°$, ir $|\overrightarrow{a}| = 5$; $|\overrightarrow{b}| = 8$. Rasti $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$ ir $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$.

Sprendimas. Tarkime, kad $|\overrightarrow{a}|$ ir $|\overrightarrow{b}|$ yra lygiagretainio kraštinės (5 brėž.).



5 brėž.

Tuomet $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ ir $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ yra to lygiagretainio įstrižainės. Remiantis kosinusų teorema:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2 &= |\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cos\varphi. \\ |\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2 &= 25+64-2\cdot 8\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=49; \quad |\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=7. \end{aligned}$$

Kitą įstrižainę galime rasti irgi pagal kosinusų teoremą:

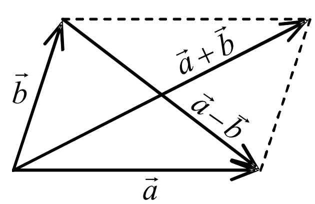
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2 &= |\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cos(\pi-\varphi). \\ |\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2 &= 25+64-2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos 120^\circ=129; \quad |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{129}. \end{aligned}$$

Ats. $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=7; \quad |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{129}.$

8.2. Kokias sąlygas turi atitikti vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$, kad būtų:

1)$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$;
2)$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|>|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$;
3)$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|<|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$.

Sprendimas. 1) Vektorių $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ ir $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ ilgiai sutampa su lygiagretainio įstrižainėmis (6 brėž.).



6 brėž.

Lygiagretainio įstrižainės yra lygios, kai jis yra stačiakampis, t. y. $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. Taigi $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$, kai vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ yra statmeni.

2) $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| > |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$ tuo atveju, kai vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ sudaro smailų kampą.

3)$|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| < |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$ tuo atveju, kai vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ sudaro buką kampą.

8.3. $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ – vienetiniai vektoriai, sudarantys su ašimi t kampus, lygius $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π. Rasti vektoriaus $3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ projekciją ašyje t.

Sprendimas. Pagal 11, 12 ir 13 punktus, turime:

$$pr_t(3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) = 3pr_t\overrightarrow{e_1} + 2pr_t\overrightarrow{e_2} + pr_t\overrightarrow{e_3} =$$

$$3|\overrightarrow{e_1}| \cos\frac{\pi}{3} + 2|\overrightarrow{e_2}| \cos\frac{2\pi}{3} + |\overrightarrow{e_3}| \cos\pi = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{-1}{2} + (-1) = \frac{-1}{2}.$$

8.4. Plokštumoje yra vektoriai $\overrightarrow{e_1} = (2; -3)$ ir $\overrightarrow{e_2} = (1; 2)$. Išreiškime vektorių $\overrightarrow{a} = (9; 4)$ vektoriais $\overrightarrow{e_1}$ ir $\overrightarrow{e_2}$.

Sprendimas. Pagal 22 punktą, vektorius $\overrightarrow{a}$ išreiškiamas vektoriais $\overrightarrow{e_1}$ ir $\overrightarrow{e_2}$:

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2}.$$

Vektorių projekcijas į koordinatines ašis galime užrašyti:

$$pr_x\overrightarrow{a} = \alpha_1 pr_x\overrightarrow{e_1} + \alpha_2 pr_x\overrightarrow{e_2},$$

$$pr_y\overrightarrow{a} = \alpha_1 pr_y\overrightarrow{e_1} + \alpha_2 pr_y\overrightarrow{e_2}.$$

Vektorių $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ ir $\overrightarrow{a}$ projekcijos yra žinomos, todėl

$$\begin{cases} 9 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ 4 = -3\alpha_1 + 2\alpha_2. \end{cases}$$

Išsprendę gausime $\alpha_1 = 2;\ \alpha_2 = 5$. Tuomet

$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}.$$

UŽDAVINIAI

8.1. Trapecijoje $OACB : BC = \frac{1}{3}OA$ ir $BC||OA$. Formule ir geometriškai išreiškite vektorių $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ vektoriais $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ ir $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$.

Ats.: $\overrightarrow{a} = 3(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b})$.

8.2. Taškas B dalija apskritimo lanką $\smile AC = \dfrac{\pi}{2}$ santykiu 1:2. O – apskritimo centras. Išreiškite vektorių $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ vektoriais $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$.

Ats.: $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{b} - \sqrt{3}\overrightarrow{a}$.

8.3. Turimas taisyklingas šešiakampis $ABCDE$, kurio kraštinė $OA = 3$. Vienetinį vektorių OA kryptimi pažymėkime $\overrightarrow{e_1}$, AB kryptimi – $\overrightarrow{e_2}$ ir BC kryptimi – $\overrightarrow{e_3}$. Rasti ryšį tarp šių vektorių. Išreikšti vektorius $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{OD}$ ir $\overrightarrow{DA}$ vektoriais $\overrightarrow{e_1}$ ir $\overrightarrow{e_2}$.

Ats.: $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$; $\overrightarrow{OB} = 3(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})$; $\overrightarrow{BC} = 3(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1})$; $\overrightarrow{EO} = 3(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2})$; $\overrightarrow{OD} = 3(2\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1})$; $\overrightarrow{DA} = 6(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2})$.

8.4. Su kuriomis α ir β reikšmėmis vektoriai $\overrightarrow{a} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \beta\overrightarrow{k}$ ir $\overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ yra kolinearūs.

Ats.: $\alpha = 4$; $\beta = -1$.

8.5. Vektorius $\overrightarrow{A}$ su koordinačių ašimis sudaro kampus $\alpha = \beta = \dfrac{2\pi}{3}$ ir $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$. Rasti šio vektoriaus koordinates, kai $|\overrightarrow{A}| = 6$.

Ats.: $\overrightarrow{A} = (-3;\ -3;\ 3\sqrt{2})$.

8.6. Keturkampio viršūnės yra taškuose $A(2;\ 0;\ 4)$; $B(7;\ -15;\ 16)$; $C(-1;\ -1;\ 11)$; $D(-14;\ 28;\ -6)$. Įrodyti, kad šis keturkampis yra trapecija.

8.7. Turimi vektoriai $\overrightarrow{a} = (3;\ -2)$; $\overrightarrow{b} = (-2;\ 1)$; $\overrightarrow{c} = (4;\ -4)$.

Išreikšti vektorių $\overrightarrow{c}$ vektoriais $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ (formule ir geometriškai).

Ats.: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$.

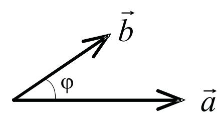
8.8. Turimi keturi vektoriai $\overrightarrow{a} = (2;\ 1;\ 0)$; $\overrightarrow{b} = (1;\ -1;\ 2)$; $\overrightarrow{c} = (2;\ 2;\ -1)$; $\overrightarrow{d} = (3;\ 7;\ -7)$. Išreikšti vektorių $\overrightarrow{d}$ vektoriais $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Ats.: $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

9. SKALIARINĖ SANDAUGA

1. Dviejų vektorių $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ skaliarine sandauga vadinamas skaičius, lygus tų vektorių ilgių sandaugai, padaugintai iš jų sudaromo kampo kosinuso (7 brėž.):

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cos \varphi.$$



7 brėž.

2. Skaliarinės sandaugos savybės:

1) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$;

2) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$;

3) $(k \cdot \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = k \cdot (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$;

4) Dviejų vektorių statmenumo sąlyga: kai $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, tai $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$;

5) $pr_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$;

6) Kai $\overrightarrow{a} = (a_x; a_y; a_z)$ ir $\overrightarrow{b} = (b_x; b_y; b_z)$, tai

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

PAVYZDŽIAI

9.1. Rasti įstrižaines lygiagretainio, kurio kraštinės yra vektoriai $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ ir $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}$, čia $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$ ir kampas tarp vektorių $\overrightarrow{e_1}$ ir $\overrightarrow{e_2}$ lygus $\dfrac{\pi}{3}$.

Sprendimas. Viena lygiagretainio įstrižainė yra vektoriaus $\vec{a} + \vec{b}$ ilgis, o kita – vektoriaus $\vec{a} - \vec{b}$ ilgis.

$$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_1} - 2\vec{e_2} = 3\vec{e_1} - \vec{e_2},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_1} + 2\vec{e_2} = \vec{e_1} + 3\vec{e_2}.$$

Kadangi $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, tai

$$\begin{aligned}
|\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})} = \\
&= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} \\
&= \sqrt{(3\vec{e_1} - \vec{e_2}) \cdot (3\vec{e_1} - \vec{e_2})} = \\
&= \sqrt{9\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} - 6\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + \vec{e_2} \cdot \vec{e_2}} \\
&= \sqrt{9|\vec{e_1}|^2 - 6|\vec{e_1}| \cdot |\vec{e_2}| \cos\frac{\pi}{3} + \vec{e_2}|^2} = \sqrt{7}.
\end{aligned}$$

Analogiškai

$$\begin{aligned}
|\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{e_1} + 3\vec{e_2}) \cdot (\vec{e_1} + 3\vec{e_2})} = \\
&= \sqrt{\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} + 6\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + 9\vec{e_2} \cdot \vec{e_2}} = \sqrt{13}.
\end{aligned}$$

9.2. Turimos trikampio viršūnės $A(3; 2; -3)$; $B(5; 1; -1)$; $C(1; -2; 1)$. Rasti vidaus kampą prie viršūnės A ir $pr_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$.

Sprendimas.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos\varphi; \quad \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|.}$$

Randame vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ koordinates: $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -4; 4)$. Tada

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 4}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{4}{9}; \quad \varphi = \arccos\frac{4}{9}.$$

Pagal skaliarinės sandaugos 5 savybę turime:

$$pr_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{8}{3}.$$

9.3. Rasti vektoriaus $\overrightarrow{s} = (2; -3; -5)$ projekciją ašyje t, kuri su x ašimi sudaro kampą $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; su z ašimi kampą $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$ ir su y ašimi smailų kampą β.

Sprendimas. Ašyje t pažymėkime vienetinį vektorių $\overrightarrow{t_0}$. Pasinaudoję 15 punkto formulėmis, gauname:

$$t_{0x} = |\overrightarrow{t_0}| \cdot \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$t_{0y} = |\overrightarrow{t_0}| \cdot \cos\beta = \cos\beta,$$

$$t_{0z} = |\overrightarrow{t_0}| \cdot \cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$\cos\beta$ randame pasinaudoję formule:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}.$$

Šiuo atveju $\cos\beta = \dfrac{1}{2}$, nes β – smailus kampas. Taigi $\overrightarrow{t_0} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.
Pagal skaliarinės sandaugos 5 savybę, turime:

$$pr_t\,\overrightarrow{s} = pr_{\overrightarrow{t_0}}\,\overrightarrow{s} = \frac{\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{t_0}}{|\overrightarrow{t_0}|} = \overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{t_0} = -3.$$

UŽDAVINIAI

9.1. Įrodyti, kad vektorius $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \dfrac{\overrightarrow{b} \cdot (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a})}{\overrightarrow{b}^2}$ yra statmenas vektoriui $\overrightarrow{b}$.

9.2. Turimos keturkampio viršūnės: $A(-5;\ 3;\ 4)$; $B(-1;\ -7;\ 5)$; $C(6;\ -5; -3)$; $D(2;\ 5;\ -4)$. Įrodyti, kad šis keturkampis kvadratas.

9.3. Turimos trikampio viršūnės: $A(-3;\ 5;\ 6)$; $B(1;\ -5;\ 7)$; $C(8;\ -3; -1)$. Rasti vidaus kampą φ_1 prie viršūnės A ir priekampį φ_2 prie viršūnės C.

Ats.: $\varphi_1 = 5°;\ \varphi_2 = 135°.$

9.4. Rasti kampą tarp koordinatinių kampų xOy ir yOz pusiaukampinių.

Nurodymas. Vektoriai $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ ir $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ yra šių koordinatinių kampų pusiaukampinės.

Ats.: $\varphi = \dfrac{\pi}{3}.$

9.5. Rasti vektoriaus $\overrightarrow{b}$ koordinates, jei jis kolinearus vektoriui $\overrightarrow{a} = (1;\ 2;\ -3)$ ir $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} = 28.$

Ats.: $\overrightarrow{b} = (2;\ 4;\ -6).$

9.6. Turimi du taškai: $A(3;\ -4;\ -2)$ ir $B(2;\ 5;\ -2)$. Rasti vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ projekciją ašyje t, kuri su x ašimi sudaro kampą $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$; su y ašimi kampą $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$; su z ašimi – buką kampą γ.

Ats.: $-5.$

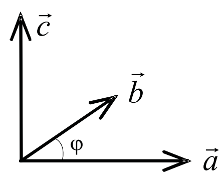
10. VEKTORINĖ SANDAUGA

Dviejų vektorių $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ vektorine sandauga vadinamas vektorius $\overrightarrow{c}$, turintis tokias savybes:

1) $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$;

2) $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \sin\varphi$, čia φ – kampas tarp vektorių $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$;

3) Vektoriaus $\overrightarrow{c}$ kryptis nustatoma taip, kad, žiūrint iš jo galo, vektorius $\overrightarrow{a}$ link vektoriaus $\overrightarrow{b}$ būtų sukamas prieš laikrodžio rodyklę mažiausiu kampu (8 brėž.).



8 brėž.

Vektorinės sandaugos savybės:

1) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a})$;

2) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$;

3) $k \cdot \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = k \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$, ($k$ – skaičius);

4) Kai vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ kolinearūs, tai $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$;

atskiru atveju $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$;

5) Kai $\overrightarrow{a} = (a_x; a_y; a_z)$ ir $\overrightarrow{b} = (b_x; b_y; b_z)$, tai

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix};$$

6) Lygiagretainio, kurio kraštinės sutampa su vektoriais $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$, plotas:

$$S = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|.$$

PAVYZDŽIAI

10.1. Lygiagretainio kraštinės sutampa su vektoriais $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ ir $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, čia $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$ ir kampas tarp šių vektorių $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Rasti lygiagretainio plotą.

Sprendimas. Pagal 6 punktą:

$$S = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |(\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}) \times (2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})|.$$

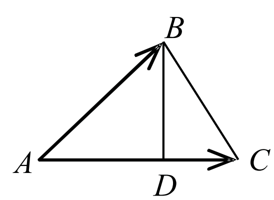
Randame vektorinę sandaugą, remdamiesi vektorinės sandaugos savybėmis ir 3 punktu:

$$(\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2})\times(2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}) = (\overrightarrow{e_1}\times 2\overrightarrow{e_1})+(2\overrightarrow{e_2}\times 2\overrightarrow{e_1})+(\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2})+(2\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_2}) =$$

$$= 4(\overrightarrow{e_2} \times 2\overrightarrow{e_1}) + (\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}) = -3(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}).$$

$$S = |-3(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2})| = |-3| \cdot |\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}| = 3 \cdot |\overrightarrow{e_1}| \cdot |\overrightarrow{e_2}| \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

10.2. Turimos trikampio viršūnės: $A(1;-1;2)$; $B(5;-6;2)$; $C(1;3;-1)$. Rasti aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės B, ilgį (9 brėž.).



9 brėž.

Sprendimas.

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|; \quad h = BD = \frac{2S}{|\overrightarrow{AC}|}.$$

Rasime vektorių koordinates: $\overrightarrow{AB} = (4; -5; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (0; 4; -3)$. Pagal 5 punktą:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} + 16\overrightarrow{k},$$

tuomet gauname:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \frac{25}{2},$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = 5.$$

Tada

$$h = \frac{25}{5} = 5.$$

10.3. Vektorius $\overrightarrow{c}$ yra statmenas vektoriams $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ bei sudaro bukąjį kampą su y ašimi. Rasti šio vektoriaus koordinates, kai $|\overrightarrow{c}| = 26$.

Sprendimas. Kadangi vektorius $\overrightarrow{c}$ yra statmenas vektoriams $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$, tai jis yra kolinearus vektorių $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ vektorinės sandaugos vektoriui, t. y. $\overrightarrow{c} \| (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}.$$

Kadangi $\overrightarrow{c} \| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, tai vektorių $\overrightarrow{c}$ ir $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ koordinatės yra proporcingos. Įvedus proporcingumo koeficientą t, vektoriaus $\overrightarrow{c}$ koordinates galima užrašyti taip: $\overrightarrow{c} = (-3t; -12t; 4t)$. Tuomet

$$|\overrightarrow{c}| = \sqrt{(-3t)^2 + (-12t)^2 + (4t)^2} = \pm 13t.$$

Pagal sąlygą $|\overrightarrow{c}| = 26$, todėl turime $\pm 13t = 26$; $t = \pm 2$.

Vektorius $\overrightarrow{c}$ su y ašimi sudaro bukąjį kampą, todėl jo projekcija į y ašį turi būti neigiama. Vadinasi, mums reikia paimti $t = 2$, tada $\overrightarrow{c} = (-6; -24; 8)$.

UŽDAVINIAI

10.1. Vektoriai $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$ sudaro $45°$ kampą. Dvi trikampio kraštinės sutampa su vektoriais $\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ ir $3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$. Rasti trikampio plotą, kai $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 5$.

Ats.: $S = 50\sqrt{2}$.

10.2. Trikampio viršūnės yra taškuose $A(1;\ -2;\ 8)$; $B(0;\ 0;\ 4)$; $C(6;\ 2;\ 0)$. Rasti aukštinę BD.

Ats.: $\frac{2}{3}\sqrt{21}$.

10.3. Rasti vektoriaus $\overrightarrow{c}$ koordinates, kai jis statmenas vektoriams $\overrightarrow{a} = (2;\ -3;\ 1)$; $\overrightarrow{b} = (1;\ -2;\ 3)$; $\overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}) = 10$.

Ats.: $\overrightarrow{c} = (7;\ 5;\ 1)$.

11. MIŠRIOJI SANDAUGA

1. Trijų vektorių $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ir $\overrightarrow{c}$ mišrioji sandauga yra skaičius $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$ ir žymima $(\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c})$.

2. Kai trys vektoriai $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ir $\overrightarrow{c}$ komplanarieji, tai mišrioji sandauga $(\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}) = 0$.

3. Kai $\overrightarrow{a} = (a_x; a_y; a_z)$; $\overrightarrow{b} = (b_x; b_y; b_z)$; $\overrightarrow{c} = (c_x; c_y; c_z)$, tai

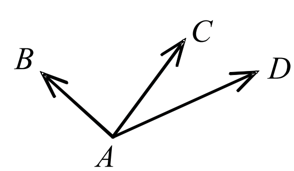
$$(\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

4. Kai gretasienio briaunos, išeinančios iš vienos viršūnės, yra vektoriai $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ir $\overrightarrow{c}$, tai jo tūris:

$$V = |(\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c})|.$$

PAVYZDŽIAI

11.1. Įrodyti, kad taškai $A(1; 0; 7)$; $B(-1; -1; 2)$; $C(2; -2; 2)$; $D(0; 1; 9)$ yra vienoje plokštumoje (10 brėž.).



10 brėž.

Sprendimas. Keturi taškai yra vienoje plokštumoje, kai vektoriai $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AD}$ komplanarūs, t. y. kai $(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}) = 0$. Rasime vektorių koordinates: $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -5)$; $\overrightarrow{AC} = (1; -2; -5)$; $\overrightarrow{AD} = (-1; 1; 2)$. Tada pagal 3 punktą:

$$(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 5 - 5 + 10 - 10 + 2 = 0.$$

Vektoriai komplanarieji, todėl taškai A, B, C ir D yra vienoje plokštumoje.

11.2. Turimos piramidės viršūnės $A(0;-2;5)$; $B(6;6;0)$; $C(3;-3;6)$; $D(2;-1;3)$. Rasti piramidės aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės C, ilgį.

Sprendimas. Aukštinę rasime pagal formulę $V = \frac{1}{3}Sh$. Pirmiausia reikia rasti piramidės tūrį ir pagrindo ABD plotą. Randame vektorių koordinates: $\overrightarrow{AB} = (6;8;-5)$; $\overrightarrow{AC} = (3;-1;1)$; $\overrightarrow{AD} = (2;1;-2)$. Pagal 4 punktą, piramidės tūris $V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD})|$.

$$(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 8 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 16 - 15 - 10 - 6 + 4 = 45.$$

Taigi $V = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$. Trikampio ABD plotą apskaičiuosime pagal formulę $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -11\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 10\overrightarrow{k}.$$

Tuomet $S = \frac{1}{2}\sqrt{(-11)^2 + 2^2 + (-10)^2} = \frac{15}{2}$ ir $h = \frac{3V}{S} = 3$.

UŽDAVINIAI

11.1. Įrodyti, kad vektoriai $\overrightarrow{a} = (-1;\ 3;\ -4)$; $\overrightarrow{b} = (2;\ -3;\ -4)$; $\overrightarrow{c} = (-3;\ 12;\ -24)$ yra komplanarieji ir išreikšti vektorių $\overrightarrow{c}$ vektoriais $\overrightarrow{a}$ ir $\overrightarrow{b}$.

11.2. Turimos piramidės viršūnės $A(2;\ 0;\ 0)$; $B(0;\ 3;\ 0)$; , $C(0;\ 0;\ 6)$; $D(2;\ 3;\ 8)$. Rasti aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės D, ilgį.

Ats.: $h = \sqrt{14}$.

11.3. Piramidės tūris $V = 5$. Trys piramidės viršūnės yra taškuose $A(2;\ 1;\ -1)$; $B(3;\ 0;\ 1)$; $C(2;\ -1;\ 3)$. Rasti ketvirtosios viršūnės D, esančios ašyje y, koordinates.

Ats.: $D(0;\ 8;\ 0)$ arba $D(0;\ -7;\ 0)$.

LITERATŪRA

1. Janušauskaitė, S. ir kt. Tiesinė algebra ir matematinė analizė. Kaunas: Technologija, 2000. 252 p.

2. Rumšas, P. Trumpas aukštosios matematikos kursas. Vilnius: Mokslas, 1976. 548 p.

3. Pridotkas, G.; Švitra, D. Aukštosios matematikos praktikumas. I dalis. Vilnius: TEV, 1997. 120 p.

4. Apynis, A. ir kt. Matematika. Vilnius: TEV, 2001. 358 p.

5. Kvedaras, B. Matricų teorija. Kaunas: VDU, 1999. 362 p.

Milda Kubilienė, Valė Stankevičienė
Tiesinės algebros praktikumas
Mokomoji knyga

Redagavo L. Kertenienė
Tekstą rinko ir maketavo M. Kubilienė

SL 136. 2004 05 28, 10,00 apsk. leid. l.
Leido Vilniaus Gedimino technikos universiteto leidykla „Technika“,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40