

## Septintasis uždavinys

*Temos. Imties koreliacijos koeficiento  $r$  apskaičiavimas, regresijos tiesės lygties radimas, koreliacijos koeficiento  $\rho$  pasikliautinojo intervalo radimas, koreliacijos koeficiento  $\rho$  reikšmės hipotezių tikrinimas, kai duomenys sugrupuoti į koreliacinę lentelę.*

### Uždavinio formulavimas

Turima dviejų atsitiktinių dydžių  $X$  ir  $Y$  koreliacinė lentelė. Apskaičiuokite koreliacijos koeficientą  $r$  ir raskite regresijos tiesės lygtį  $\bar{y}_x = a_0 + a_1x$ .

Parinkę pasikliovimo lygmenį  $\gamma = 0,95$ , raskite koreliacijos koeficiento  $\rho$  pasikliautinąjį intervalą  $0,01$  tikslumu.

Parinkę reikšmingumo lygmenį  $\alpha = 0,05$ , patikrinkite dvi parametrines hipotezes –  $H_0 : \rho = 0$  ir  $H_0 : \rho = 0,8$  (kai  $r > 0$ ) arba  $H_0 : \rho = -0,8$  (kai  $r < 0$ ).

Ar teisingai apskaičiuota, patikrinkite pagal pateiktas kontrolines sumas:

$$K\Sigma_1 = \bar{x} + s_x; \quad K\Sigma_2 = \bar{y} + s_y + r;$$

$$K\Sigma_3 = V_{(\rho=0)sk.} + V_{(\rho=0,8)sk.} + z_1 + z_2.$$

### Uždavinio teoriniai pagrindai

Kai stebėjimų skaičius  $n$  didelis ir reikšmės kartojasi, statistiniai duomenys  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  grupuojami į koreliacinę lentelę:

$X \backslash Y$	$y_1$	...	$y_j$	...	$y_l$
$x_1$	$n_{11}$	...	$n_{1j}$	...	$n_{1l}$
...	...	...	...	...	...
$x_k$	$n_{k1}$	...	$n_{kj}$	...	$n_{kl}$
...	...	...	...	...	...
$x_m$	$n_{m1}$	...	$n_{mj}$	...	$n_{ml}$

Šioje lentelėje didėjimo tvarka pateiktos visos skirtingos  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ir  $y_1, y_2, \dots, y_l$  reikšmės, o  $k$ -osios eilutės ir  $j$ -ojo stulpelio sankirtoje užrašyta reikšmių poros  $(x_k, y_j)$  dažnis  $n_{kj}$ . Aišku, kad visų dažnių  $n_{kj}$  suma yra lygi stebėjimų skaičiui  $n$ , t. y.

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^l n_{kj} = n.$$

Imties koreliacijos koeficiento skaičiavimo formulė:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y}.$$

Regresijos koeficiento  $a_1$  ir regresijos tiesės lygties  $\bar{y}_x = a_0 + a_1 \cdot x$  laisvojo nario  $a_0$  išraiškos:

$$a_1 = r \cdot \frac{s_y}{s_x}; \quad a_0 = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{x}.$$

Norėdami apskaičiuoti koreliacijos koeficientą  $r$  ir gauti regresijos tiesės lygtį, koreliacinę lentelę papildome viena eilute ir vienu stulpeliu. Paskutinėje lentelės eilutėje papildomai užrašomi reikšmių  $y_j$  pasirodymo dažniai  $n_{y_j}$ , gaunami sudėjus  $j$ -ojo

stulpelio dažnius  $n_{kj}$ , t. y.  $n_{y_j} = \sum_{k=1}^m n_{kj}$ . Analogiškai

paskutiniame stulpelyje rašomi reikšmių  $x_k$  dažniai  $n_{x_k}$ ; tai  $k$ -

osios eilutės dažnių  $n_{kj}$  sumos:  $n_{x_k} = \sum_{j=1}^l n_{kj}$ .

Taigi papildyta koreliacinė lentelė atrodo taip:

$X \setminus Y$	$y_1$	...	$y_j$	...	$y_l$	$n_x$
$x_1$	$n_{11}$	...	$n_{1j}$	...	$n_{1l}$	$n_{x_1}$
...	...	...	...	...	...	...
$x_k$	$n_{k1}$	...	$n_{kj}$	...	$n_{kl}$	$n_{x_k}$
...	...	...	...	...	...	...
$x_m$	$n_{m1}$	...	$n_{mj}$	...	$n_{ml}$	$n_{x_m}$
$n_y$	$n_{y_1}$	...	$n_{y_j}$		$n_{y_l}$	$n$

Vidurkių  $\bar{x}, \bar{y}, \overline{x^2}, \overline{y^2}, \overline{xy}$  skaičiavimo formulės:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^m n_{x_k} \cdot x_k}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^l n_{y_j} \cdot y_j}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{k=1}^m n_{x_k} \cdot x_k^2}{n},$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum_{j=1}^l n_{y_j} \cdot y_j^2}{n}, \quad \overline{xy} = \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^l n_{kj} \cdot x_k \cdot y_j}{n}.$$

Vidutinių kvadratinių nuokrypių išraiškos:

$$s_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, s_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}.$$

Kai duomenys sugrupuoti į koreliacinę lentelę, koreliacijos koeficiento  $\rho$  pasikliautinąjį intervalą rasime, taikydami anksčiau turėtą išraišką  $thz_1 < \rho < thz_2$ , o parametrinę hipotezę  $H_0: \rho = \rho_0$  tikrinsime, taikydami taip pat anksčiau turėtą apytiksliai standartinį normalųjį reikšmingumo kriterijų

$$V = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1+r}{1-r} - \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} - \frac{\rho_0}{n-1} \right) \sqrt{n-3}.$$

### **Pavyzdys**

Turima koreliacinė lentelė

$X \setminus Y$	80	85	90	93	100
25				4	2
36			5	9	3
48		5	11	2	
52	1	6	4		
65	4	4			

ir kontrolinės sumos:

$$K\Sigma_1 = \bar{x} + s_x = 56,60825; \quad K\Sigma_2 = \bar{y} + s_y + r = 93,70004;$$

$$K\Sigma_3 = V_{0sk.} + V_{0,8sk.} + z_1 + z_2 = -10,048.$$

Iš pradžių apskaičiuokime koreliacijos koeficientą  $r$  ir raskime regresijos tiesės lygtį  $\bar{y}_x = a_0 + a_1x$ .

Todėl papildykime turimą koreliacinę lentelę eilute  $n_y$  ir stulpeliu  $n_x$ :

$X \setminus Y$	80	85	90	93	100	$n_x$
25				4	2	6
36			5	9	3	17
48		5	11	2		18
52	1	6	4			11
65	4	4				8
$n_y$	5	15	20	15	5	60

Apskaičiuokime vidurkius:

$$\bar{x} = \frac{25 \cdot 6 + 36 \cdot 17 + 48 \cdot 18 + 52 \cdot 11 + 65 \cdot 8}{60} = 45,3;$$

$$\overline{x^2} = 2179,967; \quad \bar{y} = 89,5; \quad \overline{y^2} = 8035,167;$$

$$\overline{xy} = 4009,667.$$

Tuomet vidutiniai kvadratiniai nuokrypiai:

$$s_x = 11,30825; \quad s_y = 4,99164.$$

Ar apskaičiuota teisingai, patikriname pagal

$$K\Sigma_1 = \bar{x} + s_x = 56,60825.$$

Imties koreliacijos koeficientas

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y} = -0,79160.$$

Ar apskaičiuota teisingai, patikriname pagal

$$K\Sigma_2 = \bar{y} + s_y + r = 93,70004.$$

Regresijos koeficientas  $a_1 = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = -0,34942,$

o regresijos tiesės lygties  $\bar{y}_x = a_0 + a_1 \cdot x$  laisvasis narys

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{x} = 105,32890.$$

Parinę pasiklovimo lygmenį  $\gamma = 0,95$ , raskime koreliacijos koeficiento  $\rho$  pasiklvautinąjį intervalą, taikydami išraišką  $thz_1 < \rho < thz_2$ .

Apskaičiuojame:

$$z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} - u_{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-3}} = -1,335;$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} + u_{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-3}} = -0,816.$$

Tuomet  $\rho$  pasiklvautinasis intervalas:  $(-0,87; -0,67)$ .

Parinę reikšmingumo lygmenį  $\alpha = 0,05$ , patikrinkime parametrinę hipotezę  $H_0 : \rho = 0$ , taikydami reikšmingumo kriterijų

$$V = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \cdot \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Kadangi imties didumas  $n = 60$  ir koreliacijos koeficientas  $r = -0,79160$ , apskaičiuojame

$$V_{0sk.} = -8,121.$$

Žinodami reikšmingumo lygmenį  $\alpha = 0,05$  ir parinę alternatyvą  $H_a: \rho \neq 0$ , nustatome kritinę reikšmę  $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,960$  ir kritinę sritį

$$KS = (-\infty; -1,960] \cup [1,960; +\infty).$$

Matome, kad apskaičiuotoji reikšmė  $V_{sk.}$  patenka į  $KS$ . Todėl nulinę hipotezę atmetame ir priimame alternatyviają.

Parinę  $\alpha = 0,05$  ir alternatyvą  $H_a: \rho \neq \rho_0$ , patikrinkime parametrinę hipotezę  $H_0 : \rho = \rho_0 = -0,8$  (esame gavę  $r < 0$ ). Taikome reikšmingumo kriterijų

$$V = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1+r}{1-r} - \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} - \frac{\rho_0}{n-1} \right) \sqrt{n-3}.$$

Apskaičiuojame  $V_{0,8sk.} = 0,224$ .

Ar apskaičiuota teisingai, pasitikriname pagal prie koreliacinės lentelės pateiktą kontrolinę sumą:

$$K\Sigma_3 = V_{0sk.} + V_{0,8sk.} + z_1 + z_2 = -10,048.$$

Esame gavę kritinę sritį

$$KS: (-\infty; -1,960] \cup [1,960; +\infty).$$

Matome, kad apskaičiuotoji reikšmė  $V_{sk.}$  nepatenka į  $KS$ . Todėl nulinę hipotezę priimame.

### Septintojo uždavinio individualiosios imtys

Nr. 1 KS1= 55,87935 Nr. 2 KS1= 57,13678  
X\Y 80 93 104 125 140 X\Y 35 46 56 67 75  
45 4 1 45 10 4  
50 7 22 1 50 3 10 6  
55 1 13 5 1 54 1 8 14 1  
60 1 4 60 11 2  
KS2= 118,24664 KS3= 12,930 KS2= 64,91784 KS3= -9,187

Nr. 3 KS1= 95,31699 Nr. 4 KS1= 59,46413  
X\Y 55 69 81 101 115 X\Y 30 43 46 59 70  
50 3 4 25 3  
65 1 11 19 1 32 7 4  
85 7 19 4 41 12 5 1  
95 5 19 3 56 13 11 6 1  
110 2 2 65 6 1  
KS2= 97,55582 KS3= -13,120 KS2= 58,42813 KS3= -13,346

Nr. 5 KS1= 63,30550 Nr. 6 KS1= 44,96756  
X\Y 35 43 51 64 75 X\Y 75 95 104 121 135  
35 4 1 30 3 5  
47 2 8 10 36 1 6 5 1  
58 1 4 4 39 1 8 1  
63 1 5 8 43 1 9 3  
75 2 50 3 3  
KS2= 68,74580 KS3= 12,610 KS2= 118,56172 KS3= 8,713

Nr. 7 KS1= 45,86171 Nr. 8 KS1= 41,11726  
X\Y 50 70 82 92 110 X\Y 50 53 58 63 70  
30 4 25 2 8  
34 7 3 31 4 6 1  
40 10 7 1 33 5 14 3  
44 1 16 6 39 10 22 6  
50 5 45 9  
KS2= 102,17772 KS3= 17,807 KS2= 61,79900 KS3= -17,280



Nr. 9 KS1= 60,28715

X\Y 75 80 85 90

45 5 4

50 5 22 2

56 7 8 2

60 9 8

65 2 1 5

KS2= 87,93735 KS3= 9,804

Nr.10 KS1= 77,08282

X\Y 70 76 81 85

45 4 5 1

52 4 11 3

67 19 10 1

77 6 7

85 1 6 2

KS2= 81,60136 KS3= 2,823

Nr. 11 KS1= 51,44961

X\Y 70 76 78 84 90

25 2 2 1

36 1 5 10 2

46 1 5 8 2

55 7 4

KS2= 86,61185 KS3= 7,817

Nr.12 KS1= 45,73948

X\Y 95 100 103 109 115

35 5 2 1

41 3 23 14 4

44 13 24 3

50 6 2

KS2= 109,98399 KS3= 8,361

Nr. 13 KS1= 31,19499

X\Y 85 104 111 130 145

20 6

24 5 10 3

29 4 11 14 1

35 3 3

KS2= 131,83652 KS3= -11,206

Nr.14 KS1= 54,68317

X\Y 90 96 98 104 110

30 11 3

40 1 6 10 1

51 2 9 7

60 1 8 1

KS2= 104,71106 KS3= -6,504

Nr. 15 KS1= 49,83664

X\Y 60 84 103 120

35 3 11

41 18 7

46 1 13 5

50 9 6 1

55 6 65 2 3

KS2= 113,68358 KS3= -16,289 KS2=123,89082 KS3= -5,369

Nr.16 KS1= 60,07180

X\Y 90 101 123 135

45 6 2

49 5 8 3

55 1 12 7

61 2 8 1

Nr. 17 KS1= 34,38726

X\Y 65 71 74 80

20 1 8 3

26 1 7 16 5

28 2 7 8

34 9 13 3

40 3 4

KS2= 75,35435 KS3= -3,485

Nr.18 KS1= 57,14419

X\Y 50 56 61 65

25 5

35 2 5

42 1 10 12 1

55 22 8

65 4

KS2= 60,85928 KS3= -14,898

Nr. 19 KS1= 68,90843

X\Y 45 60 76 86 105

45 1 7

58 3 18 17 4

68 8 14 1

75 5 2

KS2= 91,20760 KS3= -15,323

Nr.20 KS1= 74,41769

X\Y 90 102 126 157 170

50 1 6 1

60 8 14 1

68 15 10 1

80 9 4

KS2= 155,88852 KS3= 11,157

Nr. 21 KS1= 46,06042

X\Y 55 81 95 113 135

30 6 6

36 5 8 1

38 7 12 3

45 4 10 7 1

50 8 2

KS2= 114,68313 KS3= -12,911

Nr.22 KS1= 60,26832

X\Y 35 38 45 49 55

45 4

49 2 9 6

56 1 8 12 1

61 8 7

65 2

KS2= 49,81092 KS3= -16,202

Nr. 23 KS1= 66,56886

X\Y 45 50 55 60 65

20 4 3

30 13 10 2

55 6 13 4

66 13 7

80 1 3 1

KS2= 58,98812 KS3= -8,348

Nr.24 KS1= 80,79887

X\Y 80 90 98 110 120

30 3

42 1 7 2

60 3 14 1

75 2 2 6

90 4 5

KS2= 110,96812 KS3= 10,430

Nr. 25 KS1= 50,46872

X\Y 50 59 67 76 90

20 11 2

33 3 9 2

40 11 14

47 1 11 7 1

60 4 4

KS2= 75,56836 KS3= 15,058

Nr.26 KS1= 76,50793

X\Y 85 88 94 100 105

45 2 5 1

54 5 10

65 2 5 2

77 1 4 9

85 2 1 1

KS2= 99,03793 KS3= -6,645

Nr. 27 KS1= 57,02218

X\Y 90 99 120 132 150

25 1 4

35 1 7 4 1

47 6 6

54 4 10 1

65 5

KS2=139,65121 KS3= 12,996

Nr.28 KS1= 64,10661

X\Y 80 83 91 94 100

30 1 2 1

41 8 12

53 2 9

61 8 7 1

70 6 3

KS2= 95,84973 KS3= 6,663

Nr. 29 KS1= 60,21557

X\Y 45 70 85 100 125

35 6 2

41 1 6 13

54 1 20 14 3

65 5 8 1

KS2= 98,01915 KS3= -10,260

Nr.30 KS1= 33,01567

X\Y 55 69 79 100 115

20 5 1

25 4 11 7 1

31 3 13 12 3

35 10

KS2= 104,89671 KS3= 11,507

Nr. 31 KS1= 36,16252

X\Y 45 48 55 59 65

20 2

24 1 8 2

31 3 14 10 1

36 1 8 6

40 1 3

KS2= 62,83595 KS3= 11,505

Nr.32 KS1= 84,74670

X\Y 95 98 104 108 115

40 2

53 4 7

70 7 7

80 5 12 3

100 3

KS2= 109,94078 KS3= -14,567

Nr. 33 KS1= 71,94977

X\Y 55 59 63 70

40 5 9 1

52 1 9 8

59 2 8 16

72 2 21

80 3 5

KS2= 65,41348 KS3= 6,587

Nr.34 KS1= 87,44434

X\Y 45 53 64 75

40 4

54 6 3

64 2 13 5

81 23 7

100 7

KS2= 71,35907 KS3= 16,334

Nr. 35 KS1= 56,41357

X\Y 35 46 68 80

40 3 4

45 4 10 1

49 16 9 1

54 6 19 4

60 6 7

KS2= 73,17917 KS3= 8,859

Nr.36 KS1= 80,48561

X\Y 90 102 124 135

30 2 4 1

43 1 9 5

61 1 14 13 2

79 4 14

90 7 3

KS2= 127,71503 KS3= 1,762

Nr. 37 KS1= 64,61439

X\Y 55 77 99 114 135

20 1

30 6 8

45 2 5 6 1

64 8 7 3 1

80 2

KS2= 123,77087 KS3= -11,119

Nr.38 KS1= 40,37510

X\Y 90 93 101 104 110

25 2 10 2

30 13 11

36 6 20 2

38 9 13

45 6 5 1

KS2= 103,53723 KS3= -9,941

Nr. 39 KS1= 54,62138

X\Y 80 89 97 108 120

40 3

43 11 2

48 4 18 5

53 13 14 4

60 1 5

KS2= 109,41518 KS3= 16,244

Nr.40 KS1= 65,89783

X\Y 40 44 51 53 60

20 3

38 8 7 3

54 2 15 16 1

70 5 7

80 3

KS2= 57,48021 KS3=14,739

Nr. 41 KS1= 45,46814

X\Y 60 64 71 74 80

30            1 3 4

34            9 8 2

39        4 23 5

44        18 13

50    4 5 1

KS2= 73,68944 KS3= -10,764

Nr.42 KS1= 85,47840

X\Y 100 113 146 157 180

50    1

56    1 4 3

73        3 12 4

77            4 7

90            1 2 8

KS2=169,84700 KS3= 9,270

Nr. 43 KS1= 36,04484

X\Y 30 36 49 60

20            5

26            6 10

29        8 16 1

34    9 19 6

40    6 4

KS2= 52,88729 KS3= -12,022

Nr.44 KS1= 63,68477

X\Y 90 104 120 135

50            2

54            13 9

61    1 7 7

63    4 2 1

70    4

KS2= 129,44942 KS3= -10,965

Nr. 45 KS1= 83,48868

X\Y 40 51 59 66 80

45    9 3    1

62        15 12 2

80        1 9 15 3

90            4 6

KS2= 70,96435 KS3= 12,525

Nr.46 KS1= 41,51832

X\Y 75 81 83 91 95

30    6 2

36        10 8 1

39        1 9 14 2

45            4 3

KS2= 91,94993 KS3= 10,354

Nr. 47 KS1= 68,94633

X\Y 70 85 101 115

25    6

43    10 9 5

56        22 17 1

70        1 10 16

85            3

KS2= 109,40240 KS3= 12,199

Nr.48 KS1= 76,86131

X\Y 65 76 85 95

45    6 5

56    5 7 4

65        10 10 1

76        2 7 4

85            3 6

KS2= 90,29431 KS3= 8,864

Nr. 49 KS1= 59,60862

X\Y 50 56 61 65

45 5 1

48 19 12 3

55 1 12 16

59 15 7

65 2 7

KS2= 63,56432 KS3= 14,056

Nr.50 KS1= 59,35322

X\Y 95 108 121 140

30 1 6

41 2 7 5

47 1 4 10 2

60 5 9 5 1

70 2

KS2= 132,52039 KS3= -4,622

Nr. 51 KS1= 57,83195

X\Y 95 108 137 155

45 3 5 1

51 8 4

53 4 10

58 2 9 2

65 1 1

KS2= 140,70642 KS3= 1,127

Nr.52 KS1= 65,86893

X\Y 90 94 99 105

50 7 1

53 12 9

60 1 11 5 1

64 4 16 3

70 6 4

KS2= 101,20991 KS3= 11,933

Nr. 53 KS1= 78,70081

X\Y 80 86 91 93 100

45 5

58 2 12 7

71 3 21 9 3

90 7 1

KS2= 95,18739 KS3= -13,843

Nr.54 KS1= 71,31324

X\Y 60 63 69 76 80

35 4

49 2 5 9

59 1 13 12 2

80 2 10

KS2= 78,62865 KS3= 11,602

Nr. 55 KS1= 69,54724

X\Y 75 84 97 106 115

45 2 11 1

53 4 19 6 1

67 3 26 19 1

75 2 4 1

KS2= 102,27491 KS3= -7,205

Nr.56 KS1= 54,81124

X\Y 30 41 51 60 70

20 1 18 2

39 11 16 1

52 2 5 16

65 5 3

KS2= 59,74308 KS3= 11,534

Nr. 57 KS1= 64,54176

X\Y 50 53 60 65

40 8

51 8 15 1

59 8 8

67 7 3

80 2

KS2= 60,71968 KS3= 12,353

Nr.58 KS1= 77,68946

X\Y 70 74 78 85

45 5

51 2 13

62 2 13 5

76 9 13 1

85 4 3

KS2= 82,57080 KS3= -15,957

Nr. 59 KS1= 60,93530

X\Y 50 55 59 65 70

50 5

56 11 15 2

59 3 10 8

65 3 3

KS2= 65,01750 KS3= -10,440

Nr.60 KS1= 60,66190

X\Y 30 48 71 82 110

30 4 2

40 3 9 5 1

59 2 10 8 5

75 1

KS2= 90,17378 KS3= 7,631

