Antrasis uždavinys

Temos. Normaliojo skirstinio $\mathcal{N}(a, \sigma)$:

a) vidurkio (matematinės vilties) a pasikliautinasis intervalas, kai vidutinis kvadratinis nuokrypis σ žinomas;
b) vidurkio a pasikliautinasis intervalas, kai σ nežinomas;
c) vidutinio kvadratinio nuokrypio σ pasikliautinasis intervalas, kai a nežinomas

Uždavinio formulavimas

a) Žinoma, kad atsitiktinis dydis (a. d.) X yra normalusis, t. y. $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$. Jo parametras a nežinomas, o σ žinomas: σ yra lygus *1a* uždavinyje gautam s_1, kuris imamas su vienu ženklu po kablelio (neapvalinant), t. y. $\sigma = \frac{1}{10} \cdot [s_1 \cdot 10]$. Turėdami imtį, kurios didumas $n = 50$ (žr. pirmojo uždavinio imtį), ir parinkę pasikliovimo lygmenį $\gamma = 0{,}99$, raskite parametro a pasikliautinąjį intervalą.

b) Žinoma, kad atsitiktinis dydis X yra normalusis, t. y. $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$. Jo parametrai a ir σ nežinomi. Turėdami imtį, kurios didumas $n = 50$ (žr. pirmojo uždavinio imtį), taikydami *1a* uždavinyje gautas $\overline{x}$ ir s_1 reikšmes, parinkę pasikliovimo lygmenį $\gamma = 0{,}95$, raskite a ir σ pasikliautinuosius intervalus.

c) Žinoma, kad atsitiktinis dydis X yra normalusis, t. y. $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$. Jo parametrai a ir σ nežinomi. Turėdami nedidelę normaliojo a. d. imtį (žr. *1b* uždavinio imtį), panaudoję *1b* uždavinyje gautas $\overline{x}$ ir s_1 reikšmes, parinkę pasikliovimo lygmenį $\gamma = 0{,}95$, raskite parametrų a ir σ pasikliautinuosius intervalus.

Skaičiavimo rezultatus pasitikrinkite pagal pateiktą kontrolinę sumą

$$K\Sigma_5 = t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} + \underline{a} + \underline{\sigma}.$$

Uždavinio teoriniai pagrindai

Turint imtį, žinomo skirstinio nežinomą parametrą θ galima įvertinti vienu skaičiumi θ^*, vadinamu parametro θ taškiniu įverčiu, ir dviem skaičiais $\underline{\theta}$ ir $\overline{\theta}$ – intervalo galais. Tam tikslui sudaromas intervalas ($\underline{\theta}$; $\overline{\theta}$), į kurį patenka θ su iš anksto parinkta artima 1 tikimybe γ. Šis intervalas vadinamas parametro θ pasikliautinuoju intervalu (PI), o tikimybė γ - pasikliovimo lygmeniu.

Lygybė, apibrėžianti parametro θ pasikliautinąjį intervalą:

$$P(\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}) = \gamma .$$

a) Normaliojo atsitiktinio dydžio nežinomo parametro a pasikliautinasis intervalas, kai vidutinis kvadratinis nuokrypis σ žinomas, apibrėžiamas lygybe:

$$P\left(\overline{x} - u_{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + u_{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

arba trumpiau:

$$(\underline{a};\, \overline{a}) = (\overline{x} - \delta;\, \overline{x} + \delta) ;$$

čia $\delta = u_{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ yra standartinio normaliojo (normuotojo) skirstinio $\mathcal{N}(0,\ 1)$ kritinė reikšmė. Ją galima rasti šios knygos gale, 2A lentelėje.

b) Normaliojo atsitiktinio dydžio nežinomo parametro a pasikliautinasis intervalas, kai σ nežinomas, apibrėžiamas lygybe:

$$P\left(\overline{x} - t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}}\right) = \gamma .$$

Trumpiau:

$$(\underline{a};\ \overline{a}) = (\overline{x} - \delta;\ \overline{x} + \delta)\ ;$$

čia $\delta = t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}}$, $t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}$ yra Stjūdento skirstinio su $\nu = n - 1$ laisvės laipsnių kritinė reikšmė, kurią galima rasti šios knygos gale, 3 lentelėje.

c) Normaliojo skirstinio $\mathcal{N}$*(a, σ)*, parametro σ pasikliautinasis intervalas $\left(\underline{\sigma}\ ;\overline{\sigma}\right)$, kai a nežinomas, apibrėžiamas lygybe:

$$P\left(\frac{\sqrt{n-1}s_1}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}}} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}s_1}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1}}}\right) = \gamma\ ;$$

čia $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}$ ir $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1}$ yra χ^2 skirstinio su $\nu = n - 1$ laisvės laipsnių kritinės reikšmės. Jos randamos šios knygos gale, 4 lentelėje.

1 pavyzdys

Žinoma 50 normaliojo atsitiktinio dydžio reikšmių (žr. pirmojo uždavinio 1 pavyzdį). Parinkę pasikliovimo lygmenį γ = 0,99, raskime parametro a pasikliautinąjį intervalą, kai vidutinis kvadratinis nuokrypis σ žinomas ir lygus s_1, imtam su vienu ženklu po kablelio (neapvalinant).

Parametro a pasikliautinąjį intervalą, kai vidutinis kvadratinis nuokrypis σ žinomas, apibrėžiančios lygybės:

$$(\underline{a};\ \overline{a}) = (\overline{x} - \delta;\ \overline{x} + \delta)\ ; \quad \delta = u_{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ .$$

Čia standartinio normaliojo skirstinio $\mathcal{N}$ (0, 1) kritinė reikšmė

$$u_{\frac{1-\gamma}{2}} = u_{0,005} = 2{,}576,$$

imties didumas n = 50, vidurkis $\bar{x}$ = 2,034, vidutinis kvadratinis nuokrypis s_1 = 0,82353. Tuomet σ = 0,8. Todėl

$$\delta = u_{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0{,}093 .$$

Taigi a pasikliautinasis intervalas 0,01 tikslumu yra

(1,94; 2,13).

2 pavyzdys

Žinoma 50 tiriamo požymio reikšmių (žr. pirmojo uždavinio 1 pavyzdį). Iš pradžių, parinkę pasikliovimo lygmenį γ = 0,95, raskime normaliojo skirstinio parametro a pasikliautinąjį intervalą, kai vidutinis kvadratinis nuokrypis σ nežinomas, taikydami išraiškas:

$$(\underline{a};\, \overline{a}) = (\bar{x} - \delta;\, \bar{x} + \delta)\ ; \quad \delta = t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}} .$$

Čia imties didumas n =50, imties vidurkis $\bar{x}$ =2,034, imties vidutinis kvadratinis nuokrypis s_1= 0,82353, Stjūdento skirstinio kritinė reikšmė $t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} = t_{\frac{1-0{,}95}{2};50-1} = t_{0{,}025;49} = 2{,}010$;

$$\delta = t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}} = 0{,}234.$$

Taigi a pasikliautinasis intervalas 0,01 tikslumu yra

(1,80; 2,27).

Raskime σ pasikliautinąjį intervalą $(\underline{\sigma};\overline{\sigma})$, kai a nežinomas. Šio intervalo išraiška:

$$P\left(\frac{\sqrt{n-1}\,s_1}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}}} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}\,s_1}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1}}} \right) = \gamma ,$$

čia

$$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} = \chi^2_{0,025;49} = 70,222;$$

$$\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1} = \chi^2_{0,975;49} = 31,555$$

yra χ^2 skirstinio kritinės reikšmės.

Vidutinis kvadratinis nuokrypis $s_1 = 0,82353$.

Taigi σ pasikliautinasis intervalas:

$$\left(\frac{\sqrt{49} \cdot 0,82353}{\sqrt{70,222}}; \quad \frac{\sqrt{49} \cdot 0,82353}{\sqrt{31,555}} \right) = (0,69;\ 1,03).$$

3 pavyzdys

Žinoma nedidelė normaliojo atsitiktinio dydžio imtis (žr. pirmojo uždavinio 2 pavyzdį) ir kontrolinė suma

$$\mathrm{K}\Sigma_5 = t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} + \underline{a} + \underline{\sigma} = 5,579.$$

Parinkę pasikliovimo lygmenį $\gamma = 0,95$, raskime:

parametro a pasikliautinąjį intervalą, kai vidutinis kvadratinis nuokrypis σ nežinomas;

parametro σ pasikliautinąjį intervalą, kai a nežinomas.

Taikykime a pasikliautinojo intervalo, kai σ nežinomas, išraiškas:

$$(\underline{a};\ \overline{a}) = (\overline{x} - \delta;\ \overline{x} + \delta)\ ; \quad \delta = t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}}\ ,$$

čia imties didumas $n = 18$, imties vidurkis $\overline{x} = 3,11111$, vidutinis kvadratinis nuokrypis $s_1 = 1,41583$, Stjūdento skirstinio kritinė reikšmė $t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} = t_{\frac{1-0,95}{2};18-1} = t_{0,025;17} = 2,110$.

Apskaičiuojame: $\delta = t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}} = 0,704.$

Taigi a pasikliautinasis intervalas:

0,001 tikslumu – (2,407; 3,815),

0,01 tikslumu – (2,41; 3,82).

Raskime σ pasikliautinąjį intervalą, kai a nežinomas.

Šio intervalo išraiška:

$$P\left(\frac{\sqrt{n-1}s_1}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}}}<\sigma<\frac{\sqrt{n-1}s_1}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1}}}\right)=\gamma,$$

čia χ^2 skirstinio kritinės reikšmės yra:

$$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} = \chi^2_{0,025;17} = 30,191;$$

$$\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1} = \chi^2_{0,975;17} = 7,564.$$

Tuomet σ pasikliautinasis intervalas:

0,001 tikslumu – (1,062; 2,123),

0,01 tikslumu – (1,06; 2,12).

Skaičiavimo rezultatus pasitikrinkime pagal pateiktą kontrolinę sumą:

$$K\Sigma_5 = t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1} + \underline{a} + \underline{\sigma} = 2,110 + 2,407 + 1,062 = 5,579.$$

Antrojo uždavinio imtis žr. 210–229 p.